

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,  
FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN  
MATEMATICA

A.A. 2007/2008

**Elaborato finale**

IL MONOPOLO MAGNETICO DI DIRAC

Relatore: prof. Dietmar Klemm

Candidata: Manuela Girotti  
matr. 691161

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>La concordanza con le leggi di Maxwell</b>	<b>5</b>
2.1	La formulazione covariante dell'elettromagnetismo . . . . .	7
<b>3</b>	<b>La condizione di quantizzazione di Dirac</b>	<b>11</b>
3.1	Discussione sulla condizione di quantizzazione con considerazioni semiclassiche . . . . .	11
3.2	L'argomentazione originale di Dirac . . . . .	15
3.3	Discussione sulla stringa di Dirac . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Un approccio matematico alla quantizzazione di Dirac</b>	<b>25</b>
4.1	Fibrati principali . . . . .	25
4.2	Connessione su un fibrato principale . . . . .	29
4.2.1	Digressione: gruppi di Lie e algebre di Lie. . . . .	32
4.3	Connessioni locali sulla varietà di base . . . . .	33
4.4	Curvatura . . . . .	35
4.5	Discussione sul fibrato principale associato ad un monopolo . . .	36
4.6	La condizione di quantizzazione e il Teorema di Gauss-Bonnet . .	37
<b>5</b>	<b>Conclusioni e sviluppi successivi</b>	<b>40</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

A partire dalla rivoluzione scientifica del 1600, con Galileo e Newton, gli esperimenti hanno assunto un ruolo centrale nell'indagine fisica. È innegabile l'enorme contributo che essi hanno apportato alla ricerca scientifica sino ad oggi, in cui gli scienziati possono contare su laboratori d'avanguardia. Tuttavia, la ricerca subisce inevitabilmente i limiti di quella stessa tecnologia che ne costituisce il punto di forza e lascia vaste aree non indagate.

L'esplorazione di queste regioni, inaccessibili alla sperimentazione diretta, rappresenta un'interessante speculazione intellettuale. In effetti, alcune delle teorie che stanno alla base delle conoscenze attuali sul mondo fisico sono nate come teorie speculative, che solo successivamente, dopo aver trovato le necessarie conferme sperimentali, sono state accettate universalmente: si veda, ad esempio, la teoria della relatività e la teoria dell'antimateria.

Nel 1931 il fisico inglese Paul A. Dirac (1902 - 1984) avanzò una nuova previsione su basi puramente teoriche: quella della possibile esistenza dei monopoli magnetici.

Un monopolo magnetico è una particella ipotetica che può essere descritta in termini elementari come un magnete con un solo polo. In termini più tecnici esso rappresenta una "carica magnetica" isolata.

È noto fin dall'antichità che i poli di un magnete non possono venire separati: i primi sperimentatori osservarono che, se si divide un magnete, i suoi frammenti sono altrettanti magneti completi, ciascuno con due poli.

Con l'introduzione del concetto di campo verso la metà del XIX secolo, questa osservazione apparentemente elementare fu descritta rappresentando il campo d'azione di un magnete come un insieme di linee di forza chiuse che riempiono lo spazio. Questa proprietà delle linee di forza magnetiche è descritta matematicamente mediante

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} \neq 0. \quad (1.1)$$

Qualsiasi magnete, naturale o artificiale, si comporta perciò come un dipolo, un sistema composto da due poli di polarità opposte indicate convenzionalmente come nord e sud: le linee di forza fuoriescono dal polo nord e si richiudono su se stesse attraverso il polo sud. La descrizione matematica di tale comportamento, caratterizzato dal fatto fondamentale che le linee di forza non divergono, è fornita dall'equazione

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad (1.2)$$

che esprime la condizione di assenza di sorgenti per il campo magnetico.

Il campo elettrico, invece, ammette monopoli di carica (ossia,

$$\operatorname{div}\mathbf{E} \neq 0) \quad (1.3)$$

e, in condizioni stazionarie, è irrotazionale, cioè non ha linee di forza chiuse: questa proprietà del campo elettrico viene espressa dall'equazione

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \quad (1.4)$$

Per decenni, quindi, i monopoli magnetici furono considerati esclusivamente come ipotesi teoretiche che risultavano utili per la semplificazione di alcuni calcoli. Già verso la fine del XIX secolo Poincaré aveva analizzato, all'interno della teoria elettromagnetica classica, il problema del moto di una particella carica nel campo magnetico generato da un polo isolato. In questo tipo di ricerche l'esistenza del monopolo veniva assunta a priori per via ipotetica.

La grande novità introdotta da Dirac fu il rivoluzionario atteggiamento con cui affrontò il problema. Egli si pose un obiettivo molto ambizioso: far emergere l'esistenza di questa particella a posteriori, come conseguenza matematica della teoria quantistica.

In diversi scritti ed interviste egli dichiarò spesso di non aver mai attribuito un interesse predominante alle conferme sperimentali delle sue teorie. Pur accettando che il giudizio ultimo sulla teoria risieda in questa verifica, egli prestò maggior attenzione alla consistenza interna, all'eleganza e alle qualità estetiche della teoria in sé.

La posizione di Dirac è dunque estremamente radicale: esistono i monopoli, perché esiste la matematica che li può descrivere.

La teoria di Dirac destò un grande interesse, dal momento che permetteva di risolvere alcune problematiche nel campo dell'elettromagnetismo che erano rimaste aperte. L'esistenza di monopoli porterebbe al completamento della dualità tra elettricità e magnetismo: infatti, la presenza di cariche magnetiche isolate renderebbe perfettamente simmetriche le equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti di campo.

Un'altra importante conseguenza dell'esistenza di monopoli magnetici è la quantizzazione della carica elettrica (fenomeno sperimentalmente verificato dal fisico statunitense R. Millikan nel 1910). L'argomentazione di Dirac ha come conclusione che la pura e semplice esistenza di un solo monopolo magnetico nell'Universo darebbe una spiegazione della natura discreta della carica. Dal momento che la quantizzazione della carica costituisce uno dei misteri più profondi del mondo fisico, l'idea di Dirac possiede un grande fascino.

Discutendo la dinamica quantistica di un elettrone in presenza di un monopolo magnetico, Dirac dimostrò che, per motivi di coerenza interna, la teoria richiede la seguente condizione di quantizzazione:

$$\frac{ge}{\hbar c} = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (1.5)$$

dove  $e$  è la carica dell'elettrone,  $\hbar$  è la costante di Planck ridotta e  $g$  è la carica magnetica del monopolo. La discretezza della carica magnetica appare dunque come una conseguenza dell'esistenza del monopolo. Inoltre, il valore di  $e$  è determinato dal valore della carica magnetica  $g$ ; inversamente, dal valore della

costante di struttura fina<sup>1</sup>  $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ , si deduce l'esistenza di monopoli magnetici la cui costante di struttura fina magnetica è

$$\frac{g^2}{\hbar c} = \frac{n^2}{4} \left( \frac{\hbar c}{e^2} \right) \cong \frac{137}{4} n^2. \quad (1.6)$$

Con il presente elaborato si vuole investigare il ruolo del monopolo all'interno della teoria dell'elettromagnetismo. In particolare, si può suddividere questa analisi in due grandi aree.

La prima parte affronta il problema da un punto di vista strettamente fisico: inizialmente vengono riformulate le equazioni di Maxwell considerando la presenza di cariche magnetiche isolate e viene discussa l'interazione di una carica elettrica con un monopolo.

Successivamente viene presentata una versione semplificata dell'argomentazione originale di Dirac, con la conseguente condizione di quantizzazione, e vengono approfonditi alcuni aspetti, in particolare la presenza della cosiddetta "stringa di Dirac".

La seconda parte, più matematica, si prefigge lo scopo di costruire un fibrato principale che descriva la situazione fisica di un monopolo e di ricavare la condizione di quantizzazione di Dirac mediante il teorema di Gauss-Bonnet. A tal fine, viene presentata una trattazione essenziale sui fibrati e una rapida esposizione dei principali risultati nella teoria delle connessioni su fibrati principali.

---

<sup>1</sup>La costante di struttura fina, introdotta per la prima volta da Sommerfeld, è una costante fisica fondamentale che caratterizza la forza delle interazioni elettromagnetiche. È una quantità adimensionale e il suo valore numerico è indipendente dal sistema di unità usato.

## Capitolo 2

# La concordanza con le leggi di Maxwell

Le equazioni di Maxwell sono

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho_e \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_e. \end{aligned} \quad (2.1)$$

La terza equazione è equivalente a imporre che il campo magnetico  $\mathbf{B}$  sia generato dal rotore di un campo vettoriale  $\mathbf{A}$  detto potenziale vettore:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad (2.2)$$

se si sostituisce questa espressione nella seconda equazione si ha

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.3)$$

ossia

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V, \quad (2.4)$$

dove  $V$  è una funzione scalare detta potenziale scalare.

Entrambi questi potenziali non sono univocamente determinati da  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Infatti, i campi elettrico e magnetico rimangono invariati se i potenziali si trasformano contemporaneamente nel modo seguente:

$$V \rightarrow V - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (2.6)$$

dove  $\chi$  è una generica funzione scalare. Tali trasformazioni sono note sotto il nome di **trasformazioni di gauge**.

Si supponga, adesso, che esistano cariche e correnti magnetiche, con densità  $\rho_m$  e  $\mathbf{J}_m$  in aggiunta alle normali densità di carica e corrente elettrica  $\rho_e$  e  $\mathbf{J}_e$ . Allora le equazioni di Maxwell sarebbero:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\rho_e \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_m \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 4\pi\rho_m \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_e. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si può ammettere che le densità magnetiche soddisfino un'equazione di continuità della stessa forma delle grandezze elettriche:

$$\begin{aligned} 0 &= -\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{E}) = \frac{1}{c}\operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{J}_m = \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{B}) + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{J}_m \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(4\pi\rho_m) + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{J}_m; \end{aligned}$$

quindi l'equazione di continuità per le cariche magnetiche è la seguente:

$$\operatorname{div}\mathbf{J}_m + \frac{\partial\rho_m}{\partial t} = 0. \quad (2.8)$$

Da queste equazioni si ricava che l'esistenza di cariche e correnti magnetiche avrebbe conseguenze elettromagnetiche osservabili. Si consideri, ora, la seguente trasformazione di dualità:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}' \cos \xi + \mathbf{H}' \sin \xi \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}' \cos \xi + \mathbf{B}' \sin \xi \\ \mathbf{H} &= -\mathbf{E}' \sin \xi + \mathbf{H}' \cos \xi \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{D}' \sin \xi + \mathbf{B}' \cos \xi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Se l'angolo  $\xi$  è reale, questa trasformazione lascia invariate le forme quadratiche come  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ,  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$ . Se ora le sorgenti sono sottoposte alla stessa trasformazione

$$\begin{aligned} \rho_e &= \rho'_e \cos \xi + \rho'_m \sin \xi \\ \mathbf{J}_e &= \mathbf{J}'_e \cos \xi + \mathbf{J}'_m \sin \xi \\ \rho_m &= -\rho'_e \sin \xi + \rho'_m \cos \xi \\ \mathbf{J}_m &= -\mathbf{J}'_e \sin \xi + \mathbf{J}'_m \cos \xi \end{aligned} \quad (2.10)$$

si vede subito che le equazioni di Maxwell generalizzate sono invarianti rispetto alle trasformazioni eseguite, cioè che le equazioni dei campi primati  $(\mathbf{E}', \mathbf{D}', \mathbf{B}', \mathbf{H}')$  hanno la stessa forma delle (2.7) se si usano come sorgenti quelle primate.

Tuttavia, è interessante notare che, affinché venga preservata la condizione di quantizzazione sotto una trasformazione di dualità, l'angolo  $\xi$  può assumere soltanto i seguenti valori (a meno di multipli di  $\pi$ ):

$$\xi = 0, \frac{\pi}{2}.$$

Infatti, si consideri il prodotto tra la densità di carica elettrica e la densità di carica magnetica:

$$\begin{aligned}\rho_e \rho_m &= (\rho'_e \cos \xi + \rho'_m \sin \xi) (-\rho'_e \sin \xi + \rho'_m \cos \xi) \\ &= \rho'_e \rho'_m (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) + ((\rho'_m)^2 - (\rho'_e)^2) \sin \xi \cos \xi\end{aligned}\quad (2.11)$$

Si supponga che  $\rho'_e = 0$ : allora si ha

$$\rho_e \rho_m = (\rho'_m)^2 \sin \xi \cos \xi. \quad (2.12)$$

Se si moltiplica tale espressione per un elemento di volume, si ottiene al primo membro il prodotto tra la carica elettrica e quella magnetica e al secondo membro il quadrato di una carica magnetica moltiplicato per delle costanti; si imponga, ora, la condizione di quantizzazione con  $n = 0$  (ossia, si supponga che non vi sia carica elettrica,  $q_e = 0$ , oppure non vi sia carica magnetica,  $q_m = 0$ ):

$$0 = (q'_m)^2 \sin \xi \cos \xi.$$

Tale relazione è soddisfatta se e solo se  $\sin \xi = 0$  oppure  $\cos \xi = 0$ , ossia se e solo se l'angolo  $\xi$  è uguale, rispettivamente, a  $k\pi$  oppure a  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , con  $k \in \mathbf{Z}$ .

L'invarianza delle equazioni dell'elettrodinamica rispetto alle trasformazioni di dualità indica che parlare di una particella come dotata di carica elettrica, ma non di carica magnetica, è in realtà una convenzione.

Il problema effettivo è se per tutte le particelle il rapporto tra carica elettrica e magnetica è lo stesso. In tal caso, si può eseguire una trasformazione di dualità scegliendo l'angolo  $\xi$  in modo tale che  $\rho_m = 0$ ,  $\mathbf{J}_m = 0$  e le equazioni di Maxwell si presentino nella forma consueta (2.1).

Se, per convenzione, si sceglie la carica elettrica e magnetica di un elettrone  $q_e = -e$ ,  $q_m = 0$ , allora si sa dall'esperienza che per un protone è  $q_e = +e$  mentre  $|q_m(\text{nucleone})| < 2 \cdot 10^{-24}e$ .

La conclusione è, dunque, con un'altissimo grado di esattezza, che le particelle della materia ordinaria possiedono solo carica elettrica o, equivalentemente, che il rapporto fra le loro cariche elettriche e magnetiche è lo stesso per tutte. Per le altre particelle elementari, instabili, il problema della carica magnetica è un po' meno ben definito.

## 2.1 La formulazione covariante dell'elettromagnetismo

Sia  $X$  una varietà di dimensione  $n$ ; allora, l'operatore  $\star$  definisce un'isomorfismo  $\Lambda^p(X^n) \rightarrow \Lambda^{n-p}(X^n)$ , detto **dualità di Hodge**: ad ogni  $p$ -forma  $\beta$ , viene associata l'unica  $(n-p)$ -forma  $\star\beta$  (detta **duale di**  $\beta$ ) tale che

$$\tau(\alpha|\beta) = \alpha \wedge (\star\beta) \quad (2.13)$$

$\forall \alpha \in \Lambda^p(X^n)$ , dove

$$\tau = \frac{1}{n!} \tau_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (2.14)$$

è la forma volume di  $X$  ( $g$  è la matrice di Gram della base) e  $(\alpha|\beta)$  è il prodotto interno di  $\Lambda^p(X^n)$  definito nel seguente modo:

$$(\alpha|\beta) = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \beta^{i_1 \dots i_p} \quad (2.15)$$

se  $\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$  e  $\beta = \frac{1}{p!} \beta_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ .

Scegliendo, ad esempio,  $\alpha = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$ , si possono trovare i coefficienti del duale  ${}^*\beta$ :

$$\begin{aligned} \tau(\alpha|\beta) &= \tau\beta^{1 \dots p} \\ &= \frac{1}{(n-p)!} \tau_{1 \dots p i_{p+1} \dots i_n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p \wedge dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \beta^{1 \dots p} \\ &= dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p \wedge \frac{1}{(n-p)!} ({}^*\beta)_{i_{p+1} \dots i_n} dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}. \end{aligned}$$

Quindi, sommando su tutte le permutazioni degli indici  $1 \dots p$ , si ha

$$({}^*\beta)_{i_{p+1} \dots i_n} = \frac{1}{p!} \tau_{i_1 \dots i_n} \beta^{i_1 \dots i_p} \quad (2.16)$$

In particolare, si consideri  $X \sim_{omeo} \mathbf{R}^4$  lo spaziotempo e la seguente 2-forma  $\mathbf{F}$  su  $X$  (detta **tensore di Faraday**) che rappresenta il campo elettromagnetico:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad (2.17)$$

con coefficienti

$$[F_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3. \quad (2.18)$$

Allora la sua forma duale è una  $(4-2=2)$ -forma con i seguenti coefficienti:

$${}^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \quad (2.19)$$

ossia, in forma matriciale,

$$[{}^*F^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & -H_1 & -H_2 & -H_3 \\ H_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ H_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ H_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3. \quad (2.20)$$

Le equazioni di Maxwell nel vuoto, date da

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

sono estremamente simmetriche e sono invarianti sotto la trasformazione di dualità elettromagnetica per  $\xi = \frac{\pi}{2}$ :

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{B}, -\mathbf{E}).$$

In termini di  $F^{\alpha\beta}$ , le equazioni di Maxwell diventano

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.22)$$

$$\partial_\alpha {}^*F^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.23)$$

dove l'operatore  $\partial_\alpha$  è così definito

$$\partial_\alpha = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right).$$

Mediante questa formulazione si può scrivere la trasformazione di dualità in forma più compatta:

$$F^{\alpha\beta} \rightarrow {}^*F^{\alpha\beta} \quad (2.24)$$

$${}^*F^{\alpha\beta} \rightarrow -F^{\alpha\beta}. \quad (2.25)$$

In presenza di sorgenti elettriche, le equazioni di Maxwell assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

ossia, in termini di  $F^{\alpha\beta}$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \quad (2.27)$$

$$\partial_\alpha {}^*F^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.28)$$

dove

$$J^\alpha = (c\rho, \mathbf{J}) \quad (2.29)$$

è il quadrivettore delle correnti (o quadricorrente). Si può osservare, quindi, che la dualità viene preservata soltanto se si includono anche delle sorgenti magnetiche  $K^\alpha$  (analoghe a quelle elettriche) nelle equazioni di Maxwell. In questo modo, si ottiene:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \quad (2.30)$$

$$\partial_\alpha {}^*F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} K^\beta. \quad (2.31)$$

---

1

$$[F^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{bmatrix}$$

La trasformazione di dualità viene completata con una trasformazione simile per le sorgenti:

$$J^\alpha \rightarrow K^\alpha \tag{2.32}$$

$$K^\alpha \rightarrow -J^\alpha. \tag{2.33}$$

Infine, le equazioni di continuità assumono la seguente forma covariante:

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \tag{2.34}$$

$$\partial_\alpha K^\alpha = 0. \tag{2.35}$$

## Capitolo 3

# La condizione di quantizzazione di Dirac

### 3.1 Discussione sulla condizione di quantizzazione con considerazioni semiclassiche

Si consideri la deviazione di una particella di carica  $e$  e massa  $m$  da parte del campo di un monopolo magnetico di carica  $g$ . La geometria dell'urto è schematizzata nella figura (3.1) (si supponga che l'urto avvenga nel vuoto).

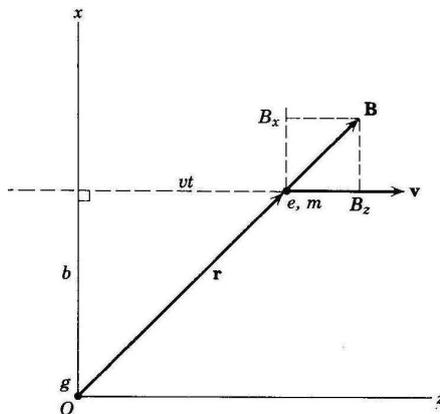


Figura 3.1: Una particella carica passa accanto ad un monopolo magnetico.

La particella incide con velocità  $v$  parallela all'asse  $z$  e parametro d'urto  $b$  e subisce l'azione del campo magnetico radiale del monopolo,  $\mathbf{B} = \frac{g}{r^3}\mathbf{r}$ , secondo la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.1)$$

Nell'approssimazione in cui l'angolo di deflessione sia piccolo, l'unica forza agente durante il tempo d'urto è diretta secondo l'asse  $y$ <sup>1</sup>

$$F_x \approx 0, F_y = \frac{e}{c} v B_x = \frac{ev}{c} \frac{gb}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}}, F_z \approx 0 \quad (3.2)$$

e l'impulso totale trasmesso alla particella è

$$\begin{aligned} \Delta p_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt = \frac{egvb}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{egvb}{c} \frac{1}{2b^2 \left(-\frac{3}{2} + 1\right)} \left[ -t \frac{1}{(b^2 + v^2 t^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= \frac{egvb}{c} \frac{(-1)(-2)}{b^2} \frac{1}{v} = \frac{2eg}{cb}. \end{aligned}$$

Dal momento che l'impulso ha la direzione dell'asse  $y$ , la particella devierà fuori del piano  $\langle x, z \rangle$ , ossia in direzione azimutale rispetto all'asse  $x$ .

Si osservi, adesso, il momento angolare  $\mathbf{L}$  della particella. La componente di  $\mathbf{L}$  nella direzione  $z$  è inizialmente nulla, mentre dopo l'urto risulta<sup>2</sup>

$$\Delta L_z = b \Delta p_y = \frac{2eg}{c}, \quad (3.3)$$

indipendente dal parametro d'urto  $b$  e dalla velocità  $v$  della particella.

La variazione della componente  $z$  del momento angolare ha dunque un valore universale, dipendente soltanto dal prodotto  $eg$  e dalla velocità della luce, per qualunque particella carica che si muova in presenza di un monopolo magnetico in quiete, a qualunque distanza questo si trovi.

Se si ammette ora che qualunque variazione di momento angolare deve essere un multiplo di  $\hbar$ , si perviene immediatamente alla condizione di quantizzazione di Dirac<sup>3</sup>.

Il carattere di universalità della variazione del momento angolare di una particella carica in moto in presenza di un monopolo magnetico può essere spiegato considerando la quantità di moto angolare posseduta dai campi di una carica elettrica puntiforme in presenza di un monopolo magnetico anch'esso puntiforme. Si supponga che il monopolo  $g$  si trovi nel punto  $\mathbf{x} = \mathbf{R}$  e la carica  $e$  sia in  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , come indicato in figura (3.2); i campi elettrico e magnetico in tutto lo spazio sono i seguenti

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r'^2} \mathbf{n}', \quad \mathbf{E} = -e \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{e}{r^2} \mathbf{n} \quad (3.4)$$

dove  $r' = |\mathbf{x} - \mathbf{R}|$ ,  $r = |\mathbf{x}|$  e  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{n}'$  sono i versori in direzione, rispettivamente, di  $(\mathbf{x} - \mathbf{R})$  e  $\mathbf{x}$ .

Il momento angolare  $\mathbf{L}_{em}$  è dato dall'integrale di volume di  $\mathbf{x} \times \mathbf{g}$ , dove  $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi c}$  è la densità di momento elettromagnetico.

<sup>1</sup>  $B_x = B_r \cos \varphi \sin \vartheta = \frac{g}{r^2} \cos(0) \frac{b}{r} = \frac{gb}{r^3}$  con  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{b^2 + (vt)^2}$ .

<sup>2</sup>  $\Delta \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{p} = (0, 0, b \Delta p_y)$  poiché  $\mathbf{r} = (b, 0, 0)$  e  $\Delta \mathbf{p} = (0, b \Delta p_y, 0)$  all'istante dell'urto.

<sup>3</sup> Questa dimostrazione è dovuta essenzialmente a Goldhaber ed enunciata in [6].

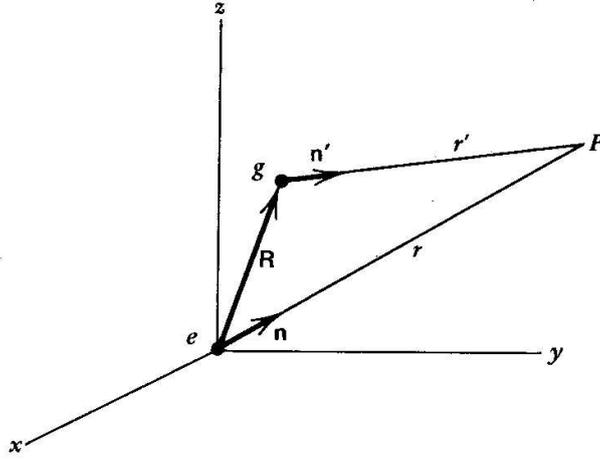


Figura 3.2: Campo creato da una particella di carica elettrica puntiforme in presenza di un monopolo magnetico.

**Osservazione 1.** L'impulso elettromagnetico totale è nullo, ossia

$$\mathbf{P}_{em} = \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{g} d^3\mathbf{x} = 0. \quad (3.5)$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{em} &= \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3\mathbf{x} = \frac{ge}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mathbf{n}}{r^2} \times \frac{\mathbf{n}'}{r'^2} d^3\mathbf{x} = \\ &= \frac{ge}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{R}}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}|^3} d^3\mathbf{x} = \\ &= -\frac{ge}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{x}|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{R}|^3} d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

È sempre possibile scegliere un sistema di riferimento tale che  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  e  $\mathbf{R} = (0, 0, R)$ , ossia in modo tale che la carica puntiforme si trovi nell'origine e il monopolo giaccia sull'asse  $z$ . In questo caso si ha

$$\begin{aligned} P_{em,x} &= \frac{ge}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{-yR}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} (x^2 + y^2 + (z - R)^2)^{3/2}} dx dy dz = 0 \\ P_{em,y} &= \frac{ge}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{xR}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} (x^2 + y^2 + (z - R)^2)^{3/2}} dx dy dz = 0 \\ P_{em,z} &= 0. \end{aligned}$$

L'annullamento dei primi due integrali è dovuto al fatto che la funzione integranda è una funzione, rispettivamente, dispari in  $y$  e in  $x$  e il dominio di integrazione è pari.  $\square$

L'annullamento del momento totale  $\mathbf{P}_{em}$  implica che il momento angolare elettromagnetico  $\mathbf{L}_{em}$  è indipendente dalla scelta dell'origine.

**Proposizione 2.** *Il momento angolare elettromagnetico è indipendente dalla distanza tra la carica elettrica e quella magnetica; in particolare, si ha<sup>4</sup>*

$$\mathbf{L}_{em} = \frac{eg}{c} \frac{\mathbf{R}}{R}. \quad (3.6)$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{em} &= \frac{1}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3\mathbf{x} = \frac{e}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{x} \times \left( \frac{\mathbf{n}}{r^2} \times \mathbf{B} \right) d^3\mathbf{x} = \\ &= \frac{e}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

Dal momento che  $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{n} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) = -[\mathbf{B}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})] = -[\mathbf{B} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})]$ , si ha

$$\mathbf{L}_{em} = -\frac{e}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{r} [\mathbf{B} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})] d^3\mathbf{x} = -\frac{e}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \left[ \frac{\mathbf{B}}{r} - \frac{\mathbf{x}}{r^3} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) \right] d^3\mathbf{x}$$

Tale espressione è equivalente<sup>5</sup> a

$$\mathbf{L}_{em} = -\frac{e}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} d^3\mathbf{x}$$

Integrando per parti, si ottiene

$$= \frac{e}{4\pi c} \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{n} (\operatorname{div} \mathbf{B}) d^3\mathbf{x} - \frac{e}{4\pi c} \int_S \mathbf{n} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_S) da$$

dove il secondo addendo è l'integrale "di bordo" di una superficie  $S$  posta all'infinito e  $\mathbf{n}_S$  è la normale esterna a tale superficie. Sostituendo l'espressione di  $\mathbf{B}$  e scegliendo come superficie  $S$  il bordo di una palla centrata in  $\mathbf{R}$ , si vede facilmente che l'integrale di superficie è uguale a<sup>6</sup>

$$g \int_S \mathbf{n} d\Omega = g \int_{S=[0,\pi] \times [0,2\pi]} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0.$$

Dal momento che  $\mathbf{B}$  è generato da un monopolo puntiforme, la sua divergenza è pari a  $4\pi g \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R})$ ; sostituendo, si ottiene la tesi:

$$\mathbf{L}_{em} = \frac{eg}{c} \int_{\mathbf{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} d^3\mathbf{x} = \frac{eg}{c} \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

□

<sup>4</sup>Questo risultato fu enunciato per la prima volta da J.J. Thomson in [8].

<sup>5</sup>Lo si può dimostrare per componenti. Ad esempio, la componente  $x$  è uguale a

$$\frac{B_x}{r} - \frac{x^2 B_x + xy B_y + xz B_z}{r^3},$$

con  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; tale quantità è uguale a

$$B_x \frac{\partial n_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial n_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial n_x}{\partial z},$$

dove  $n_x = \frac{x}{r}$  è la prima componente del vettore  $\mathbf{n}$ .

<sup>6</sup>È possibile dimostrare anche questo risultato per componenti. Ad esempio, la componente  $x$  è uguale a

$$g \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = g \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta [\sin \varphi]_0^{2\pi} = 0;$$

un risultato simile si trova per le restanti componenti.

Se ora consideriamo il processo d'urto della figura (3.1) e il momento angolare del sistema, somma di quello della particella e di quello del campo elettromagnetico, troviamo che esso rimane invariato. La variazione (3.3) del momento angolare della particella è esattamente compensata dalla variazione del momento angolare elettromagnetico (3.6) dovuta al rovesciamento del vettore  $\mathbf{R}$ .

## 3.2 L'argomentazione originale di Dirac

Nello sviluppare la meccanica quantistica di un elettrone in presenza di un monopolo magnetico è opportuno cambiare il meno possibile la struttura formale delle interazioni elettromagnetiche, per esempio conservando l'espressione dell'operatore Hamiltoniano di interazione<sup>7</sup> nella forma consueta

$$H_{int} = V - \frac{e}{mc} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}. \quad (3.7)$$

Per ottenere questo risultato con una carica magnetica è necessario usare un artificio. La carica magnetica  $g$  viene concepita come l'estremità di una fila di dipoli o di un sottilissimo solenoide avvolto molto strettamente, che si estende fino all'infinito.

Poiché il potenziale vettore di un dipolo magnetico è  $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$ , dove  $\mathbf{m}$  è il suo momento magnetico, il contributo elementare  $d\mathbf{A}$  al potenziale vettore in un punto  $\mathbf{x}$  dello spazio, dovuto al dipolo elementare  $d\mathbf{m}$  situato in  $\mathbf{x}'$  è dato da

$$d\mathbf{A}(\mathbf{x}) = d\mathbf{m} \times \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right). \quad (3.8)$$

Il momento di dipolo infinitesimo, inoltre, è uguale a

$$d\mathbf{m} = g d\mathbf{l}, \quad (3.9)$$

dove  $g$  è la carica magnetica e rappresenta la densità per unità di lunghezza del momento di dipolo. Il potenziale vettore risulta, quindi, pari a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = g \int_L d\mathbf{l} \times \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = g \int_L \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (3.10)$$

<sup>7</sup>L'equazione di Schrödinger per una particella in assenza di campo è uguale a:

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi,$$

dove la quantità  $\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$  viene chiamata Hamiltoniano libero. In presenza di un campo elettromagnetico, invece, l'equazione assume la seguente espressione:

$$\frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

dove si è applicata la cosiddetta "sostituzione minimale"  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ , con  $V$  e  $\mathbf{A}$ , rispettivamente, i potenziali scalare e vettore delle sorgenti. Si può osservare che, svolgendo i calcoli, il primo membro dell'equazione è uguale alla somma di due addendi:

$$(H_{lib} + H_{int}) \psi = \left( \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \left( \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \frac{e}{mc} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + V \right) \right) \psi$$

l'Hamiltoniano libero e quello che viene denominato Hamiltoniano di interazione, entrambi applicati alla funzione d'onda  $\psi$ .

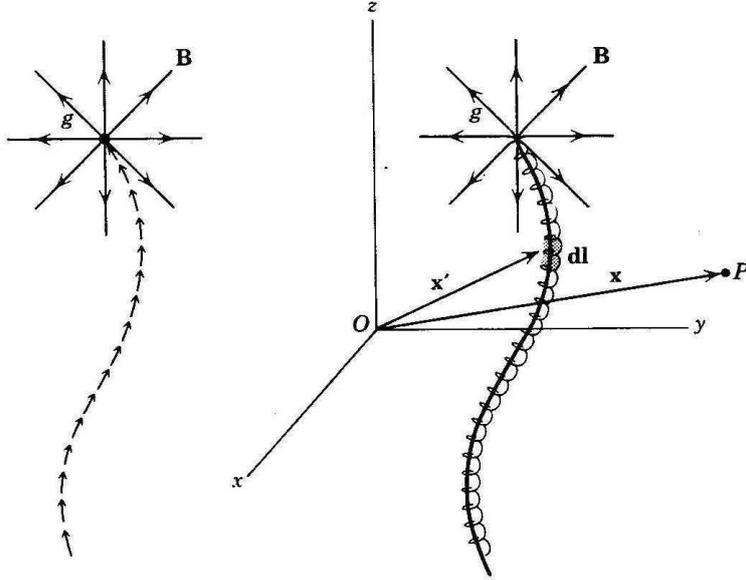


Figura 3.3: Due rappresentazioni del monopolo magnetico e della stringa di Dirac.

**Proposizione 3.** *Il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  ha le seguenti componenti, in coordinate sferiche:*

$$A_r = 0, \quad A_\vartheta = 0, \quad A_\varphi = \frac{g(1 - \cos \vartheta)}{r \sin \vartheta} = \frac{g}{r} \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right). \quad (3.11)$$

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità, si supponga che il monopolo si trovi nell'origine e la stringa  $L$  coincida con il semiasse  $z$  negativo. Il potenziale vettore assume, quindi, la seguente espressione:

$$\begin{aligned} A_x &= -gy \int_0^{-\infty} \frac{dz'}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right)^3} \\ A_y &= gx \int_0^{-\infty} \frac{dz'}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right)^3} \\ A_z &= 0 \end{aligned}$$

Calcolando separatamente l'integrale, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{-\infty} \frac{dz'}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}\right)^3} = \int_z^{+\infty} \frac{-dw}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + w^2}\right)^3} = \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} \left[ -\frac{w}{\sqrt{x^2 + y^2 + w^2}} \right]_z^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} \left( -1 + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right). \end{aligned}$$

Allora, passando in coordinate polari, si ottiene:

$$I = \frac{\cos \vartheta - 1}{r^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \sin \vartheta \cos \varphi + A_y \sin \vartheta \sin \varphi + A_z \cos \vartheta = 0 \\ A_\vartheta &= A_x \cos \vartheta \cos \varphi + A_y \cos \vartheta \sin \varphi - A_z \sin \vartheta = 0 \\ A_\varphi &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi = \frac{g(1 - \cos \vartheta)}{r \sin \vartheta}. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 4.** Il potenziale vettore non è definito per  $\vartheta = \pi$ , ossia è singolare lungo la stringa  $L$ .

**Proposizione 5.** Il campo magnetico  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$  ha la forma Coulombiana del campo di carica puntiforme, eccetto che per  $\vartheta = \pi$ .

*Dimostrazione.* Il rotore di un campo vettoriale in coordinate sferiche ha la seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned} (\text{rot} \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\vartheta (A_\varphi \sin \vartheta) - \partial_\varphi A_\vartheta) \\ (\text{rot} \mathbf{A})_\varphi &= \frac{1}{r} (\partial_r (r A_\vartheta) - \partial_\vartheta A_r) \\ (\text{rot} \mathbf{A})_\vartheta &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\varphi A_r - \partial_r (r A_\varphi) \right) \end{aligned}$$

Nel caso in esame, si ottiene,  $\forall (r, \varphi, \vartheta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi)$ :

$$\begin{aligned} (\text{rot} \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta \left( \frac{g}{r} (1 - \cos \vartheta) \right) = \frac{g}{r^2} \\ (\text{rot} \mathbf{A})_\varphi &= 0 \\ (\text{rot} \mathbf{A})_\vartheta &= -\frac{1}{r} \partial_r \left( \frac{g(1 - \cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \right) = 0 \end{aligned}$$

Da ciò segue la tesi. □

Il flusso magnetico concatenato con una spira circolare di raggio  $R \sin \vartheta$ , come indicato nella figura (3.4), è pari a

$$\Phi_+ = 2\pi g(1 - \cos \vartheta), \text{ se } 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \quad (3.12)$$

$$\Phi_- = -2\pi g(1 + \cos \vartheta), \text{ se } \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi \quad (3.13)$$

Infatti, nel caso in cui  $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ , si consideri come superficie  $\Sigma$ , avente come bordo la spira circolare  $\gamma$  (vedi figura (3.4)), la calotta sferica superiore. In questo modo,  $\mathbf{B}$  risulta costante su  $\Sigma$ . Il flusso è dunque uguale a

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = |\mathbf{B}| \cdot A(\Sigma) = \frac{g}{R^2} 2\pi R^2 (1 - \cos \vartheta) = 2\pi g(1 - \cos \vartheta).$$

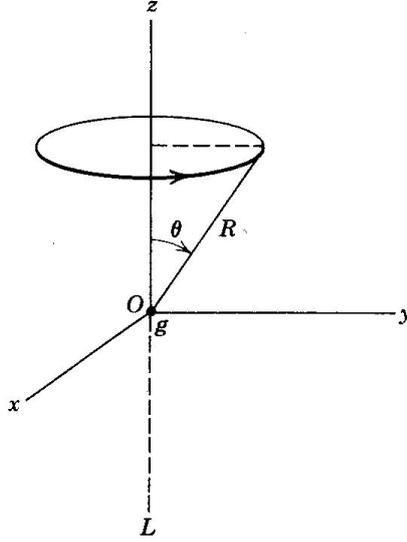


Figura 3.4: La spirale  $\gamma$  nel caso  $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ .

Con analoghi ragionamenti si ricava il flusso nel caso  $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$  (si consideri come superficie  $\Sigma$  la calotta inferiore e come versore normale  $\mathbf{n}$  il versore diretto verso l'alto).

È possibile calcolare il flusso totale concatenato con la spirale  $\gamma$  sfruttando l'espressione  $\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ :

$$\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.14)$$

per il teorema di Stokes; dove

$$\mathbf{l} = (R \sin \vartheta \cos \varphi, R \sin \vartheta \sin \varphi, R \cos \vartheta)$$

con  $R, \vartheta$  costanti,

$$d\mathbf{l} = \begin{bmatrix} R \sin \vartheta (-\sin \varphi) \\ R \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi$$

Il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  è definito nel seguente modo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{\varphi} \sin \varphi + A_{\vartheta} \cos \varphi \cos \vartheta + A_r \cos \varphi \sin \vartheta \\ A_{\varphi} \cos \varphi + A_{\vartheta} \sin \varphi \cos \vartheta + A_r \sin \varphi \sin \vartheta \\ -A_{\vartheta} \sin \vartheta + A_r \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{\varphi} \sin \varphi \\ A_{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} (R \sin \vartheta A_{\varphi} \sin^2 \varphi + R \sin \vartheta A_{\varphi} \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= R \sin \vartheta A_{\varphi} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R \sin \vartheta A_{\varphi} = \\ &= 2\pi g(1 - \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (3.15)$$

**Osservazione 6.**  $\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi_+$ , mentre

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \Phi_- = 2\pi g(1 - \cos \vartheta) + 2\pi g(1 + \cos \vartheta) = 4\pi g.$$

D'altra parte,  $\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  è il flusso del campo magnetico attraverso la calotta sferica superiore e  $\Phi_-$  è l'opposto del flusso del campo magnetico attraverso la calotta inferiore (le due calotte sono individuate dalla spira  $\gamma$ ); quindi, la differenza appena calcolata è uguale alla somma dei due flussi esterni del campo  $\mathbf{B}$ , ossia è pari al flusso magnetico totale attraverso l'intera superficie sferica  $S^2$  che circonda il monopolo.

$$\Phi_{totale} = \int_{S^2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = 4\pi g \quad (3.16)$$

La singolarità del potenziale vettore lungo la corda  $L$  può essere spiegata con l'esistenza di un campo magnetico  $\mathbf{B}'$  molto intenso all'interno del solenoide; questo convoglia lungo la corda un flusso magnetico di ritorno pari a  $-4\pi g$  che compensa il flusso uscente dal monopolo. Il campo dovuto al solo monopolo è dunque uguale a

$$\mathbf{B}_{monopolo} = rot\mathbf{A} - \mathbf{B}' \quad (3.17)$$

dove  $\mathbf{B}'$  è diverso da zero solo lungo la corda (cioè all'interno del solenoide).

Accettando l'espressione (3.10) come l'espressione corretta per il potenziale vettore  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  del monopolo e della sua corda, resta da affrontare il problema dell'arbitrarietà della configurazione della corda. È evidente che il valore delle osservabili fisiche non deve dipendere dalla scelta della configurazione.

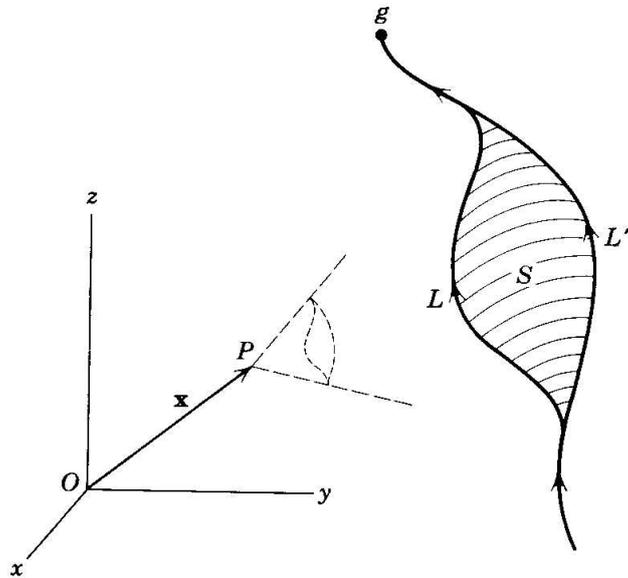


Figura 3.5: Due corde diverse  $L$  e  $L'$  danno potenziali vettori di monopolo che differiscono per una trasformazione di gauge.

Si considerino due corde diverse  $L$  e  $L'$ ; la differenza dei due corrispondenti potenziali vettori è data dal seguente integrale

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}) = g \int_C d\mathbf{l} \times \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (3.18)$$

dove  $C = L' - L$  è la curva chiusa che circonda l'area  $S$ , come si vede nella figura (3.5). Risulta, quindi,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + g \nabla \Omega(\mathbf{x}) \quad (3.19)$$

dove  $\Omega$  è l'angolo solido con il vertice in  $P$  che sottende il contorno  $C$ . Confrontando tale espressione con le equazioni di trasformazione di gauge definite nel capitolo 2 ( $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi$ ), si conclude che il passare dalla corda  $L$  alla corda  $L'$  equivale ad eseguire una trasformazione di gauge con  $\chi = g\Omega$ . In conclusione, ad ogni diversa configurazione della corda corrisponde una diversa gauge per il potenziale. D'altro canto, in meccanica quantistica, il cambiamento di gauge dei potenziali elettromagnetici lascia invariata l'equazione di Schrödinger purché l'equazione d'onda venga contemporaneamente trasformata secondo la legge

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i \frac{e\chi}{\hbar c}} \quad (3.20)$$

dove  $e$  è la carica della particella e  $\chi$  è la funzione di gauge<sup>8</sup>. Una variazione della configurazione della corda deve perciò essere accompagnata da una variazione di fase della funzione d'onda dell'elettrone

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i \left( \frac{eg}{\hbar c} \right) \Omega}. \quad (3.21)$$

Siccome  $\Omega$  varia bruscamente di  $4\pi$  quando l'elettrone attraversa la superficie  $S$ , la funzione d'onda risulterebbe polidroma, a meno che non si imponga

$$\frac{eg}{\hbar c} 4\pi = 2\pi n, \text{ con } n \in \mathbf{Z}. \quad (3.22)$$

In conclusione, la condizione di quantizzazione di Dirac deriva dall'esigenza di invarianza di gauge e di univocità della funzione d'onda, cioè dall'indipendenza dalla posizione della corda del monopolo.

### 3.3 Discussione sulla stringa di Dirac

La presenza di una stringa infinita di singolarità associata ad un monopolo è essenzialmente un'ipotesi di lavoro, dal momento che presenta una situazione non fisica e di difficile trattazione teorica.

Si potrebbe sostenere che la singolarità del potenziale vettore sia fisicamente ininfluente, essendo il potenziale nient'altro che un artefatto matematico utilizzato nel calcolo dei campi, che sono le sole entità con un significato fisico diretto.

Questa osservazione è senz'altro valida nel mondo macroscopico descritto dalla fisica classica, ma non è accettabile in un contesto quantistico. Infatti la funzione d'onda di una particella carica in un campo elettromagnetico, che

<sup>8</sup>Si veda il capitolo successivo.

contiene tutta l'informazione sullo stato del sistema, è la soluzione di un'equazione d'onda in cui figurano i potenziali elettromagnetici. Pertanto un sistema quantistico viene influenzato dal potenziale vettore magnetico, la cui singolarità potrebbe portare a risultati fisici privi di senso.

Per risolvere questo problema, Dirac suppose che la stringa che accompagna il monopolo non sia fisicamente osservabile, ossia non eserciti nessuna influenza sul mondo esterno, e postulò, inoltre, che la funzione d'onda di una particella sia nulla nei punti della corda.

Tale congettura, nota come “veto di Dirac”, equivale ad imporre che una particella abbia una probabilità uguale a zero di trovarsi sulla stringa di Dirac, ovvero che non possa mai attraversarla. La stringa di Dirac sarebbe perciò del tutto inaccessibile.

Tuttavia, in lavori successivi (1948), Dirac riprese e approfondì questo postulato, da molti considerato troppo arbitrario e quindi criticato.

In effetti, le difficoltà teoriche connesse alla stringa sono state per molti anni una sorta di ostacolo alla prosecuzione dei lavori di Dirac. Ad ogni modo, è possibile eliminare radicalmente la presenza della stringa, cambiando punto di vista e non imponendo la condizione (alquanto stringente) dell'esistenza di un unico vettore potenziale che definisce il campo magnetico  $\mathbf{B}$ .

Innanzitutto, è utile dimostrare che non è possibile definire un unico potenziale  $\mathbf{A}$ , per tutto lo spazio fisico, privo di singolarità.

**Proposizione 7.** *Se la carica magnetica  $g \neq 0$ , esiste una singolarità su ogni sfera centrata nel monopolo.*

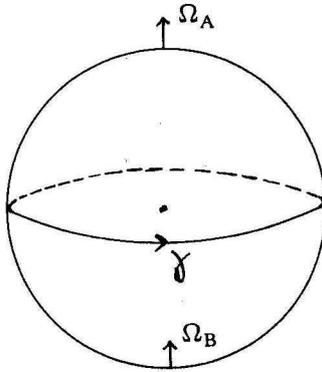


Figura 3.6: Varietà sferica  $S^2$  suddivisa in due regioni.

*Dimostrazione.* Si consideri un'arbitraria sfera centrata nel monopolo  $g$  e si supponga che esista un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  tale che  $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ , che non presenta singolarità sulla sfera. Allora, per il Teorema di Stokes, si ha

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Omega_A$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Omega_B$$

dove  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$  sono il flusso del campo  $\mathbf{B}$  rispettivamente attraverso la calotta superiore e inferiore, individuate da  $\gamma$ . Sottraendo le due equazioni, in modo da ottenere il flusso totale esterno, si ha la seguente contraddizione:

$$0 = \Omega_A - \Omega_B = 4\pi g \neq 0.$$

Questo implica che sulla sfera ci deve essere una singolarità; ma, dal momento che il raggio della sfera è arbitrario, deve esserci una singolarità su ogni sfera e, quindi, si ha una stringa di singolarità.  $\square$

Il modo di eliminare la singolarità si ricollega al problema di trovare un sistema di coordinate sulla superficie di una sfera. È possibile dimostrare che non esiste un unico sistema di due coordinate che ricopra interamente questa varietà senza una singolarità.

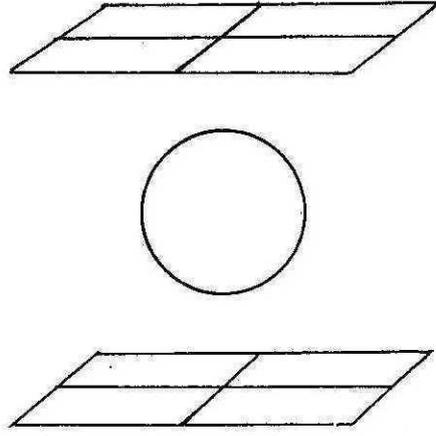


Figura 3.7: Due sistemi di coordinate ricoprono interamente la sfera  $S^2$  e costituiscono un'atlante per tale varietà.

Il problema può, tuttavia, essere risolto, usando due sistemi di coordinate, in modo tale che l'uno copra l'emisfero nord e l'altro l'emisfero sud. Dividendo la sfera in due regioni ( $U_+$  e  $U_-$ ), si possono definire due diversi potenziali per ciascuna delle due aree<sup>9</sup>:

$$\text{in } U_+ : \quad A_r^+ = 0, \quad A_\vartheta^+ = 0, \quad A_\varphi^+ = \frac{g}{r \sin \vartheta} (1 - \cos \vartheta) \quad (3.23)$$

$$\text{in } U_- : \quad A_r^- = 0, \quad A_\vartheta^- = 0, \quad A_\varphi^- = -\frac{g}{r \sin \vartheta} (1 + \cos \vartheta) \quad (3.24)$$

Si può, inoltre, notare che questi vettori potenziali non hanno singolarità nella regione in cui sono definiti. Si consideri adesso la regione di sovrapposizione delle due aree (che corrisponde alla fascia equatoriale sulla sfera:  $U_+ \cap U_- \sim_{htp} S^1$ ). In questa regione entrambi i potenziali definiscono il campo  $\mathbf{B}$ , ossia

$$\text{rot} \mathbf{A}^+ = \text{rot} \mathbf{A}^-. \quad (3.25)$$

<sup>9</sup>Si può facilmente dimostrare che entrambi questi potenziali definiscono il corretto campo magnetico di un monopolo di carica  $g$ .

Tale relazione implica che i due potenziali differiscono per il gradiente di una funzione scalare:

$$\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^- = k \cdot \nabla \alpha \quad (3.26)$$

dove  $k$  è una costante opportuna affinché l'equazione di Schrödinger rimanga invariata sotto la trasformazione di gauge  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + k \cdot \nabla \alpha$ .

L'equazione di Schrödinger per un elettrone (non relativistico) nel campo creato da un monopolo è uguale a<sup>10</sup>

$$\frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (3.27)$$

ossia

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + V\psi = E\psi. \quad (3.28)$$

Applicando le seguenti trasformazioni di gauge  $\mathbf{A}^+ \rightarrow \mathbf{A}^+ + k \cdot \nabla \alpha = \mathbf{A}^-$  e  $\psi^+ \rightarrow \psi^+ e^{i\alpha} = \psi^-$ , si ottiene un sistema di tre equazioni nella sola incognita  $k$ , a patto di imporre che la funzione  $\alpha$  sia armonica, ossia tale che  $\Delta \alpha = 0$ .

Si ricava, quindi, il coefficiente  $k$  necessario per definire il gauge tra i due potenziali  $\mathbf{A}^+$  e  $\mathbf{A}^-$ :

$$k = \frac{\hbar c}{e}. \quad (3.29)$$

Si può inoltre osservare che la differenza tra i due vettori potenziali è uguale a

$$\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^- = \frac{2g}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\hbar c}{e} \cdot \nabla \alpha$$

con (in coordinate sferiche)

$$\nabla \alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \mathbf{e}_r.$$

Quindi

$$\alpha = \frac{2eg}{\hbar c} \varphi. \quad (3.30)$$

In conclusione, le funzioni d'onda degli elettroni attorno al monopolo sono descritte da una sezione, e non da una funzione ordinaria. Dal momento che le sezioni d'onda sono completamente definite su ciascuna regione ( $U_+$  e  $U_-$ ), è necessario che tali sezioni assumano lo stesso valore dopo aver compiuto un giro attorno alla fascia equatoriale, ossia

$$\psi(r, \vartheta, \varphi, t) = \psi(r, \vartheta, \varphi + 2\pi, t).$$

<sup>10</sup>L'equazione di Schrödinger in presenza di un campo elettromagnetico è uguale a

$$\frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi.$$

Si supponga, come ansatz, che la soluzione  $\psi$  sia un prodotto di due funzioni del tipo

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \hat{\psi}(\mathbf{x}),$$

dove  $E$  è l'energia della particella a cui è associata la funzione d'onda  $\psi$ . Allora è sufficiente sostituire tale espressione nell'equazione di Schrödinger per ricavare l'equazione scritta sopra.

Ma ciò accade

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{i\alpha(\varphi)} = e^{i\alpha(\varphi+2\pi)} &\Leftrightarrow e^{i\frac{2eg}{\hbar c}\varphi} = e^{i\frac{2eg}{\hbar c}(\varphi+2\pi)} \\ \Leftrightarrow 4\pi\frac{eg}{\hbar c} &= 2\pi n \text{ con } n \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

È stata nuovamente ricavata la condizione di quantizzazione di Dirac.

Riprendendo il discorso sul calcolo del flusso totale del campo  $\mathbf{B}$  attraverso una sfera centrata nel monopolo, è possibile sfruttare i due potenziali vettori definiti precedentemente e ottenere quanto segue. Se si denota di nuovo  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$  i flussi del campo attraverso la calotta superiore e inferiore e si applica il teorema di Stokes, si ha

$$\Omega_A - \Omega_B = \oint_{\gamma} (\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-) \cdot d\mathbf{l} = 2g \oint_{\gamma} d\varphi = 2g\Delta\varphi = 4\pi g. \quad (3.32)$$

Non vi è più la contraddizione che sorgeva quando si considerava soltanto un vettore potenziale.

Questo risultato è uno dei metodi fondamentali per dimostrare il teorema di Gauss-Bonnet che sarà esposto in seguito.

## Capitolo 4

# Un approccio matematico alla quantizzazione di Dirac

Questa sezione presenta sinteticamente alcuni concetti della teoria dei fibrati, al fine di discutere in modo matematico il concetto di monopolo magnetico. È stata privata di alcune dimostrazioni, per non appesantire ulteriormente l'elaborato. Per una trattazione più approfondita si rimanda al testo [2].

### 4.1 Fibrati principali

**Definizione 8.** Un **fibrato** è un insieme  $(P, X, \pi, G)$  che gode delle seguenti proprietà:

- $P$  e  $X$  sono spazi topologici; in particolare, lo spazio  $X$  è detto **base**;
- $\pi : P \rightarrow X$  è una mappa continua e suriettiva;
- $\pi^{-1}(x)$ , per ogni  $x \in X$  è omeomorfo ad uno spazio topologico  $F$ . In questo caso,  $\pi^{-1}(x)$  è chiamata la **fibra** nel punto  $x$  (è indicata anche come  $F_x$ ) e lo spazio  $F$  è detto **fibra tipica**;
- $G$  è un gruppo di Lie<sup>1</sup> di omeomorfismi  $F \rightarrow F$ ;

Inoltre il fibrato presenta un ricoprimento di  $X$  tramite una famiglia di aperti  $\{U_j | j \in J\}$  tale che:

- a) il fibrato è localmente banale<sup>2</sup>, i.e.  $\pi^{-1}(U_j)$  è omeomorfo al prodotto cartesiano  $U_j \times F$ ,  $\forall j \in J$ . L'omeomorfismo  $\phi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$  è del tipo  $\phi_j(p) = (\pi(p), \hat{\phi}_j(p))$  e il diagramma nella figura (4.1) è commutativo.

L'insieme  $\{U_j, \phi_j\}$  è una famiglia di **banalizzazioni locali** del fibrato. Sia  $x \in U_j$ , allora  $\hat{\phi}_j|_{F_x} = \hat{\phi}_{j,x}$  è un omeomorfismo tra  $F_x$  e  $F$ ;

---

<sup>1</sup>Per la definizione di gruppo di Lie vedi la sottosezione 4.2.1.

<sup>2</sup>Un esempio di fibrato banale è il fibrato cartesiano  $(A \times B, B, \pi_B)$  con  $\pi_B$  la proiezione sul secondo elemento del prodotto cartesiano definita nel seguente modo:  $\pi_B(x^a, x^b) = x^b$ .

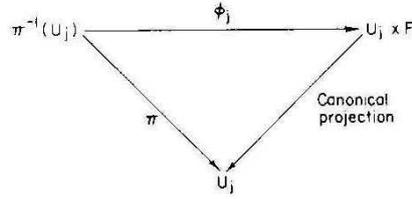


Figura 4.1: (proiezione canonica)  $\circ \phi_j = \pi$

- b) esiste una correlazione tra i sottofibrati banali definiti sugli aperti  $U_j$  che ricoprono la base. Sia  $x \in U_j \cap U_k$ , la relazione tra le mappe  $\widehat{\phi}_{j,x}$  e  $\widehat{\phi}_{k,x}$  definisce la struttura del fibrato; inoltre, l'omeomorfismo  $\widehat{\phi}_{j,x} \circ \widehat{\phi}_{k,x}^{-1} : F \rightarrow F$  è un elemento del **gruppo strutturale**  $G^3$ ;

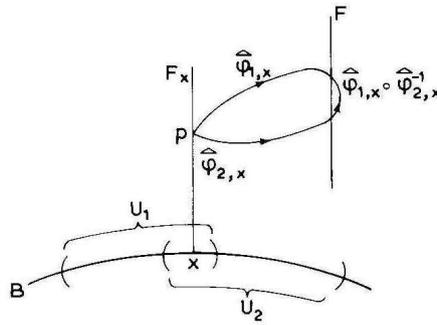


Figura 4.2: Rappresentazione grafica dell'omeomorfismo  $g_{jk}(x)$ .

- c) le mappe indotte, chiamate **funzioni di transizione**,  $g_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow G$ ,  $x \mapsto g_{jk}(x) = \widehat{\phi}_{j,x} \circ \widehat{\phi}_{k,x}^{-1}$ , sono continue; inoltre soddisfano la relazione

$$g_{jk}(x)g_{ki}(x) = g_{ji}(x)$$

### Esempio: il nastro di Möbius.

- *Base*:  $S^1$  di lunghezza  $4a$  ricoperta da due aperti  $U_1$  e  $U_2$

$$U_1 = \{x \mid -2a < x < a\}, \quad U_2 = \{x \mid 0 < x < 3a\}$$

dove  $x$  è la coordinata di un punto di  $S^1$ , quindi  $x \sim x + 4na$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

- *Proiezione*:  $\pi(p) \in S^1$ ; identificando un punto di  $S^1$  con le sue coordinate, si può scrivere  $\pi(p) = x_p$ .

<sup>3</sup>In questo caso, l'elemento  $g \in G$  è identificato con la trasformazione  $\sigma_g : F \rightarrow F$ , un elemento del gruppo di trasformazioni.

- *Fibra Tipica:*  $F = I \subseteq \mathbf{R}$ ;

$$\begin{aligned} \phi_1 : \pi^{-1}(U_1) &\rightarrow U_1 \times I \\ p &\mapsto \phi_1(p) = (\pi(p), \widehat{\phi}_1(p)) \end{aligned}$$

dove  $\widehat{\phi}_1(p) = i_p$ , con  $i_p$  la coordinata di  $\widehat{\phi}_1(p) \in I$  (in modo analogo si definisce  $\phi_2$ ).

- *Gruppo strutturale:* l'intersezione di  $U_1$  e  $U_2$  è uguale a due insiemi disgiunti  $V$  e  $W$

$$V = \{x | 0 < x < a\} \text{ e } W = \{x | -2a < x < -a\}$$

Sia  $p$  tale che  $\pi(p) \in V$

$$\widehat{\phi}_{1,x_p}(p) = i_p, \widehat{\phi}_{2,x_p}(p) = i_p, \widehat{\phi}_{1,x_p} \circ \widehat{\phi}_{2,x_p}^{-1} = e$$

Sia  $q$  tale che  $\pi(q) \in W$

$$\widehat{\phi}_{1,x_q}(q) = i_q, \widehat{\phi}_{2,x_q}(q) = -i_q, \widehat{\phi}_{1,x_q} \circ \widehat{\phi}_{2,x_q}^{-1} = g$$

dove  $e$  e  $g$  sono gli elementi del gruppo di simmetria di ordine 2 ( $\sim_{iso} \mathbf{Z}_2$ ).

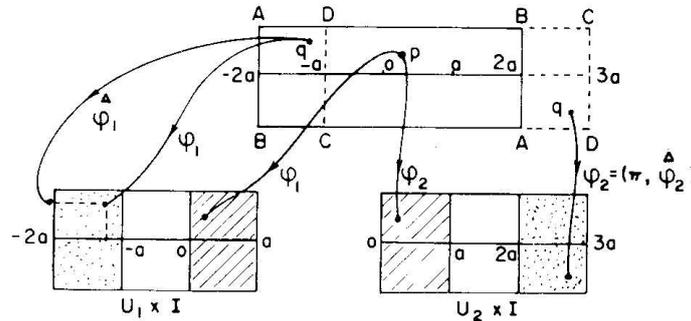


Figura 4.3: Costruzione di un nastro di Möbius: i punti con la stessa etichetta  $A, B, C, D$  sono identificati.

Viene ora introdotto un caso particolare di fibrato chiamato “fibrato principale”.

**Definizione 9.** Un fibrato in cui la fibra tipica  $F$  e il gruppo strutturale  $G$  sono isomorfi e in cui  $G$  agisce su  $F$  mediante una traslazione sinistra<sup>4</sup> è chiamato **fibrato principale**.

Da questa definizione, si può, quindi, notare che il nastro di Möbius non è un fibrato principale, dal momento che la sua fibra tipica è un intervallo e il suo gruppo strutturale è  $\mathbf{Z}_2$ .

<sup>4</sup>Viene definita traslazione sinistra la seguente applicazione:  $L_g : G \rightarrow G$  tale che  $L_g(h) = gh$ . Analogamente si definisce traslazione destra l'applicazione  $R_g : G \rightarrow G$  tale che  $R_g(h) = hg$ .



Per definizione,  $G$  agisce su  $F = G$  per traslazione sinistra; per  $x \in U_i \cap U_j$ , sia  $g_{ij}(x)$  l'elemento di  $G$  tale che

$$\widehat{\phi}_{i,x} \circ \widehat{\phi}_{j,x}^{-1}(g) = g_{ij}(x)g \quad \forall g \in G.$$

Quindi, si ha

$$g_i = g_{ij}(x)g_j$$

e

$$\begin{aligned} (\widetilde{R}_g p)_j &\stackrel{\text{def.}}{=} \widehat{\phi}_{j,x}^{-1}(g_j g) \\ &= \widehat{\phi}_{i,x}^{-1} \circ \widehat{\phi}_{i,x} \circ \widehat{\phi}_{j,x}^{-1}(g_j g) \\ &= \widehat{\phi}_{i,x}^{-1}(g_{ij}(x)g_j g) \\ &= \widehat{\phi}_{i,x}^{-1}(g_i g) \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} (\widetilde{R}_g p)_i. \end{aligned}$$

□

Il risultato di questa proposizione garantisce che la mappa  $\widetilde{R}_g$  è indipendente dalla scelta dell'aperto  $U_i$  contenente  $x = \pi(p)$  e che, quindi, è ben definita su tutto  $P$ . Si può quindi scrivere

$$\widetilde{R}_g(p) = \widehat{\phi}_{i,x}^{-1} \circ R_g \circ \widehat{\phi}_{i,x}(p), \quad x = \pi(p) \in U_i \quad (4.4)$$

## 4.2 Connessione su un fibrato principale

In un fibrato principale  $(P, X, \pi, G)$  ogni fibra è isomorfa alla fibra tipica  $G$ ; tuttavia, non vi è un isomorfismo canonico: dipende dal ricoprimento  $\{U_i\}$  di  $X$  e dalla scelta delle mappe  $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ .

Una connessione su  $P$  porta ad una corrispondenza tra due fibre qualsiasi lungo una curva  $C$  in  $X$ . Un punto  $p$  della fibra su un punto della curva  $x \in C \subseteq X$  in riferimento a questa corrispondenza è detto **traslato parallelamente** lungo la curva. La curva  $\widetilde{C}$  descritta dal trasporto parallelo di  $p$  è detta **sollevamento orizzontale** della curva  $C$ .

Per ottenere il sollevamento orizzontale di una curva  $C$  di  $X$ , è sufficiente associare ad ogni vettore tangente  $\mathbf{v}_x$  ad un punto  $x \in X$ , e ad ogni punto  $p$  della fibra  $G_x = \pi^{-1}(x)$ , un vettore tangente  $\mathbf{v}_p$  a  $P$  nel punto  $p$ , chiamato **vettore orizzontale**, che si proietta su  $\mathbf{v}_x$  tramite la mappa  $\pi' : TP \rightarrow TX$  (l'applicazione tangente).

Il sollevamento orizzontale della curva  $C$ , attraverso un punto  $p \in P$ , è dunque definito come la curva integrale di questi vettori orizzontali.

Inoltre, è necessario che valgano le seguenti proprietà:

- il trasporto parallelo sia compatibile con la struttura differenziale e di fibrato principale di  $P$ ;
- la mappa appena definita  $T_x(X) \rightarrow T_p(P)$ ,  $\mathbf{v}_x \mapsto \mathbf{v}_p$ , preservi la struttura vettoriale e sia differenziabile rispetto ad  $x$ ;

- due sollevamenti orizzontali  $\widehat{C}_1$  e  $\widehat{C}_2$  di una stessa curva  $C$ , dati dalla stessa connessione, ma attraverso punti diversi  $p_1$  e  $p_2$  della fibra  $\pi^{-1}(x)$ , siano collegati dalla trasformazione  $\widetilde{R}_g$  che porta  $p_1$  in  $p_2$ ;

Queste richieste portano alla seguente definizione di connessione.

**Definizione 12 (I).** Una **connessione su un fibrato principale**  $(P, X, \pi, G)$  è una mappa  $\sigma_p : T_x(X) \rightarrow T_p(P)$ ,  $x = \pi(p)$  per ogni  $p \in P$  tale che

- $\sigma_p$  è lineare;
- $\pi' \circ \sigma_p$  è la mappa identica su  $T_x(X)$ ;
- $\sigma_p$  dipende in modo differenziabile da  $p$ ;
- $\sigma_{\widetilde{R}_g p} = \widetilde{R}'_g \sigma_p$ ,  $g \in G$ ;

Sia  $C : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow X$ , tale che  $t \mapsto C(t)$ , una curva in  $X$  passante per il punto  $x_0 = C(0)$  e sia  $p_0$  un punto della fibra di  $x_0$ . La traslazione parallela di  $p_0$  lungo  $C$  è data dalla curva integrale  $\widehat{C} : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow P$ , tale che  $t \mapsto \widehat{C}(t) = p$ , definita dalle relazioni

$$\frac{d\widehat{C}(t)}{dt} = \sigma_p \left( \frac{dC(t)}{dt} \right), \quad \widehat{C}(0) = p_0 \quad (4.5)$$

**Osservazione 13.**  $\forall t : \pi \widehat{C}(t) = C(t)$ , per il punto  $b$ ).

L'azione destra di  $G$  su  $P$  commuta con il trasporto parallelo: due sollevamenti orizzontali  $\widehat{C}_1$  e  $\widehat{C}_2$  della stessa curva  $C$  soddisfano la relazione

$$\widehat{C}_2(t) = \widetilde{R}_g \widehat{C}_1(t) \quad (4.6)$$

per ogni  $t$ , con lo stesso elemento  $g \in G$ , se soddisfano tale relazione per  $t = 0$

$$\widehat{C}_2(0) = p_2 = \widetilde{R}_g p_1 = \widetilde{R}_g \widehat{C}_1(0), \quad (4.7)$$

dal momento che entrambi i membri soddisfano la stessa equazione differenziale (per il punto  $d$ )).

Poichè  $\sigma_p$  è lineare, lo spazio dei vettori orizzontali a  $p$

$$H_p = \sigma_p(T_x(X)) \text{ con } x = \pi(p)$$

è un sottospazio vettoriale di  $T_p(P)$ . Grazie alla proprietà  $b$ ) della definizione, si ha anche

$$\pi'(H_p) = T_x(X) \quad (4.8)$$

quindi  $H_p$  è isomorfo a  $T_x(X)$  tramite la mappa lineare  $\pi'$ ;

Si può riformulare la definizione di connessione in termini di spazio di vettori orizzontali  $H_p$  nel seguente modo.

**Definizione 14 (II).** Una **connessione su un fibrato principale**  $(P, X, \pi, G)$  è un campo di spazi vettoriali  $H_p, H_p \subseteq T_p(P)$ , tali che

- a)  $\pi' : H_p \rightarrow T_x(X)$  è un isomorfismo;
- b)  $H_p$  dipende in modo differenziabile da  $p$ ;
- c)  $H_{\tilde{R}_g p} = \tilde{R}'_g H_p$ ;

Gli elementi di  $H_p$  sono i **vettori orizzontali** a  $p$ , mentre gli elementi dello spazio tangente  $T_p(F_x) = V_p$  alla fibra  $F_x = G_x$  nel punto  $p$  sono detti **vettori verticali**. Si può dimostrare che  $T_p(P) = H_p \oplus V_p$  e, quindi, ogni  $\mathbf{v} \in T_p(P)$  può essere univocamente scritto come

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_V, \text{ con } \mathbf{v}_H \in H_p, \mathbf{v}_V \in V_p. \quad (4.9)$$

Poiché  $G$  agisce su  $P$  attraverso l'azione destra  $\tilde{R}_g$ , esiste un isomorfismo vettoriale naturale tra l'algebra di Lie  $\mathcal{G}$  del gruppo  $G$  e  $V_p$ :

$$\forall \mathbf{v}(p) \in V_p : \quad \mathbf{v}(p) \leftrightarrow \hat{\mathbf{v}} \quad (4.10)$$

Sia  $\mathbf{v}(p) \in V_p$ , allora tale vettore si può esprimere mediante la seguente relazione:

$$\mathbf{v}(p) = \left. \frac{d(\tilde{R}_{g(s)} p)}{ds} \right|_{s=0} \quad (4.11)$$

Infatti, per definizione di spazio tangente ( $V_p = T_p(F_x)$ ), ogni vettore di tale spazio è il vettore tangente di una opportuna curva definita sullo spazio di base  $F_x$ . Possiamo, inoltre, definire tale curva a partire da un opportuno punto  $p$  mediante l'azione destra del gruppo  $G$ .

Si consideri, ora,  $\hat{\mathbf{v}}$  un elemento dell'algebra di Lie  $\mathcal{G}$ ; allora, vale la seguente relazione (vedi la digressione sulle algebre di Lie poco più avanti, nella sottosezione 4.2.1)

$$\hat{\mathbf{v}}(g) = L'_g \hat{\mathbf{v}}(e). \quad (4.12)$$

In conclusione, si può definire l'isomorfismo canonico tra  $V_p$  e  $\mathcal{G}$  nel seguente modo:

$$\mathbf{v}(p) = \left. \frac{d(\tilde{R}_{g(s)} p)}{ds} \right|_{s=0} \leftrightarrow \hat{\mathbf{v}} = L'_{g(s)} \mathbf{v}(e) \quad (4.13)$$

dove

$$\mathbf{v}(e) = \left. \frac{dg(s)}{ds} \right|_{s=0} \in T_e(G). \quad (4.14)$$

Se si considera l'insieme degli spazi orizzontali  $H_p$ , si ha, per ogni  $p \in P$ , una famiglia di mappe lineari (ben definite)

$$\begin{aligned} T_p(P) &\rightarrow \mathcal{G} \\ \mathbf{v} &\mapsto \widehat{\mathbf{v}} = \widehat{\text{ver}} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.15)$$

e l'insieme di queste mappe è una 1-forma  $\omega$  su  $P$  a valori nello spazio vettoriale  $\mathcal{G}$ :

$$\omega(\mathbf{v}) = \widehat{\text{ver}} \mathbf{v} \quad (4.16)$$

$\forall \mathbf{v} \in T_p(P)$ ; e, quindi,  $\omega(\text{hor } \mathbf{v}) = 0$ .

Si perviene, infine, alla terza definizione di “connessione” (equivalente alle precedenti).

**Definizione 15 (III).** Una **connessione sul fibrato principale**  $(P, X, \pi, G)$  è una 1-forma  $\omega$  su  $P$  a valori nello spazio vettoriale  $\mathcal{G}^5$  tale che

- a)  $\omega_p(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{u}}$ , dove  $\mathbf{u} \in V_p$  e  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{G}$  sono collegati dall'isomorfismo canonico;
- b)  $\omega_p$  dipende in modo differenziabile da  $p$ ;
- c)  $\omega_{\tilde{R}_g p}(\tilde{R}'_g \mathbf{v}) = \text{Ad}(g^{-1})\omega_p(\mathbf{v})^6$ ;

**Osservazione 16.** Se è data una connessione mediante la definizione (15), si può definire lo spazio dei vettori orizzontali come il nucleo delle mappe  $\omega_p : T_p(P) \rightarrow \mathcal{G}$ , ossia

$$H_p = \{\mathbf{v} \in T_p(P) \mid \omega_p(\mathbf{v}) = 0\}.$$

#### 4.2.1 Digressione: gruppi di Lie e algebre di Lie.

Sia  $G$  un gruppo. Esso viene chiamato **gruppo di Lie** se è anche una varietà differenziabile tale che le operazioni di prodotto  $(G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy)$  e inverso  $(G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1})$  sono differenziabili.

Si consideri il seguente gruppo di trasformazioni di  $G$  in sé:

$$\{L_g : G \rightarrow G \text{ tale che } h \mapsto gh \mid g \in G\}.$$

Un campo vettoriale  $\mathbf{v}^7$  su  $G$  è **invariante a sinistra** se

$$L'_g(\mathbf{v}(h)) = \mathbf{v}(L_g(h)) = \mathbf{v}(gh), \quad \forall g, h \in G. \quad (4.17)$$

Allora, si ha

$$L'_g \gamma = \mathbf{v}(g) \text{ se } \gamma = \mathbf{v}(e). \quad (4.18)$$

Viceversa, la relazione  $L'_g \gamma = \mathbf{v}(g)$  garantisce che il campo vettoriale  $\mathbf{v}$  sia invariante a sinistra:

$$\mathbf{v}(L_g h) = \mathbf{v}(gh) = L'_{gh} \mathbf{v}(e) = (L_g \circ L_h)' \mathbf{v}(e) = L'_g \circ L'_h \mathbf{v}(e) = L'_g \mathbf{v}(h). \quad (4.19)$$

In questo modo, è stata appena dimostrata la seguente proposizione:

**Proposizione 17.** *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra e lo spazio  $T_e(G)$  dei vettori tangenti a  $G$  nell'elemento neutro  $e$ .*

<sup>5</sup>In generale, una  **$q$ -forma**  $\varphi$  è una applicazione antisimmetrica:

$$\begin{aligned} P &\rightarrow \Lambda^q(P) \\ p &\mapsto \varphi_p \in \Lambda^q(P) \sim \text{Lin}_{q,A}(T_p(P), V) \end{aligned}$$

dove  $V$  è uno spazio vettoriale.

<sup>6</sup> $\forall g \in G$  viene definito **aggiunto** di  $g$  il seguente operatore:  $\text{Ad}(g) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , tale che  $\forall \gamma \in \mathcal{G}$   $\gamma \mapsto g\gamma g^{-1}$ .

<sup>7</sup>Un **campo vettoriale**  $\mathbf{v}$  sulla varietà  $X$  è un'applicazione definita nel modo seguente:

$$\begin{aligned} X &\rightarrow T(X) \\ x &\mapsto \mathbf{v}_x \in T_x(X). \end{aligned}$$

**Osservazione 18.** L'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra è dunque uno spazio vettoriale con dimensione pari alla dimensione di  $T_e(G)$ , ossia della stessa dimensione del gruppo  $G$ .

Inoltre, si può dimostrare che l'insieme dei campi invarianti a sinistra è chiuso rispetto alle parentesi di Lie ( $[ \ , \ ]$ ). In conclusione, tale spazio è un'algebra di Lie, chiamata **algebra di Lie  $\mathcal{G}$  del gruppo  $G$** .

### 4.3 Connessioni locali sulla varietà di base

Data una connessione  $\omega$ , si vuole associare ad ogni sezione<sup>8</sup> locale (differenziabile) di  $\pi^{-1}(U) \subseteq P$  (con  $U \subseteq X$ ) una 1-forma su  $U$  a valori in  $\mathcal{G}$ . Sia

$$f : U \subseteq X \rightarrow f(U) \subseteq P, \quad \pi \circ f = \text{Id}$$

una sezione locale di  $P$ ; è possibile definire una 1-forma  $\bar{\omega} = f^*\omega$  su  $U$  a valori in  $\mathcal{G}$  tramite il pull-back di  $\omega$  lungo  $f$ :

$$\forall \mathbf{u} \in T_x(X), x \in U : (f^*\omega)_x(\mathbf{u}) = \omega_{f(x)}(f'(\mathbf{u}))$$

Viceversa:

**Proposizione 19.** *Data una 1-forma differenziabile  $\bar{\omega}$  su  $U$  a valori in  $\mathcal{G}$  e una sezione differenziabile  $f$  su  $\pi^{-1}(U) \Rightarrow \exists!$  connessione  $\omega$  su  $\pi^{-1}(U)$  tale che  $f^*\omega = \bar{\omega}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{v} \in T_{p_0}(P)$ ,  $p_0 = f(x_0)$ ; si può scrivere

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

dove  $\mathbf{v}_1 = (f' \circ \pi')\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}_2$  è un vettore verticale (infatti

$$\pi'\mathbf{v} = \pi'\mathbf{v}_1 + \pi'\mathbf{v}_2 = \pi'\mathbf{v} + \pi'\mathbf{v}_2 \Rightarrow \pi'\mathbf{v}_2 = 0$$

poiché  $\pi' \circ f' = \text{Id}$ ).

Si definisca, quindi, una 1-forma  $\omega$  a valori in  $\mathcal{G}$  in ogni punto  $p_0 \in f(U)$  della sezione nel seguente modo

$$\omega_{p_0}(\mathbf{v}) = \bar{\omega}_x(\pi'\mathbf{v}) + \hat{\mathbf{v}}_2$$

dove  $\hat{\mathbf{v}}_2$  è ottenuto da  $\mathbf{v}_2$  mediante l'isomorfismo canonico  $V_p \rightarrow \mathcal{G}$ .

Si estenda, ora,  $\omega$  a tutti i punti di  $\pi^{-1}(U)$  attraverso l'azione di  $G$ , ossia

$$\omega_p(\mathbf{v}) = \text{Ad}(g^{-1})\omega_{p_0}((\tilde{R}_g^{-1})'\mathbf{v})$$

se  $p = \tilde{R}_g p_0$ . La 1-forma appena definita soddisfa le proprietà 1-2-3 della definizione (15) ed è l'unica che tale che  $f^*\omega = \bar{\omega}$ .  $\square$

<sup>8</sup>Una **sezione** di un fibrato  $(P, X, \pi)$  è una mappa

$$f : X \rightarrow P$$

tale che  $\pi \circ f = \text{Id}$ .

Questa costruzione può essere estesa al caso in cui  $\bar{\omega}$  sia una 1-forma differenziabile definita su tutta la base  $X$ .

Tuttavia, è importante notare che se  $P$  non è un fibrato banale, la 1-forma  $\bar{\omega}$  non è il pull-back di  $\omega$  lungo una sezione differenziabile globale  $f : X \rightarrow P$ , dal momento che in questo caso tale sezione non esiste.

**Definizione 20.** Sia  $\bar{\text{Id}} : U_i \rightarrow U_i \times G$  tale che  $x \mapsto (x, e)$ . Una **sezione**  $s_i$  di  $\pi^{-1}(U_i)$  **canonicamente associata alla banalizzazione**  $\phi_i$  è l'applicazione

$$s_i = \phi_i^{-1} \circ \bar{\text{Id}} \quad (4.20)$$

La 1-forma  $\bar{\omega}_i = s_i^* \omega$  su  $U_i$  è chiamata **forma connessione nella banalizzazione locale**  $\phi_i$ .

**Proposizione 21.** In un punto  $x \in U_i \cap U_j$  le forme connessioni  $\bar{\omega}_i$  e  $\bar{\omega}_j$ , nei gauge locali  $\phi_i$  e  $\phi_j$ , che corrispondono alla stessa connessione  $\omega$  sono collegate dalla relazione

$$\bar{\omega}_{i,x} = \text{Ad}(g_{ji}^{-1}(x))\bar{\omega}_{j,x} + (g_{ji}^* \theta_{MC})_x \quad (4.21)$$

dove  $g_{ij}$  è la funzione di transizione

$$\begin{aligned} g_{ij} : U_i \cap U_j &\rightarrow G \\ x &\mapsto g_{ij}(x) = \hat{\phi}_{i,x} \circ \hat{\phi}_{j,x}^{-1} \end{aligned}$$

e  $(g_{ji}^* \theta_{MC})_x$  è il pull-back su  $U_i \cap U_j$  della 1-forma di Maurer-Cartan su  $G^9$  mediante la funzione di transizione.

**Osservazione 22.** Nel caso in cui  $G$  sia un sottogruppo del gruppo  $GL(n)$  e agisca su  $TX$  mediante trasformazioni lineari, la trasformazione precedente può essere riscritta nel seguente modo:

$$\bar{\omega}_i(\mathbf{v}) = g_{ji}^{-1}(x)\bar{\omega}_j(\mathbf{v})g_{ji}(x) + g_{ji}^{-1}(x)g'_{ji}(x)\mathbf{v}. \quad (4.22)$$

In ambito fisico, le 1-forme  $\bar{\omega}_i$  vengono chiamate **potenziali di gauge** e le banalizzazioni  $\phi_i$  sono i **gauge locali**. Le  $\bar{\omega}_i$  sono uguali al potenziale tradizionale  $\mathbf{A}$  a meno di costanti moltiplicative:

$$\bar{\omega}_i(x) = ie\mathbf{A}_i(x). \quad (4.23)$$

Si consideri il fibrato principale  $(P, X, \pi, G)$  con gruppo strutturale  $G = U(1)$  ( $\subseteq GL(1, \mathbf{C})$ ), i.e. il gruppo dei numeri complessi  $z$  di norma unitaria ( $z = e^{i\alpha}$ ). Si definiscano, inoltre, le funzioni di transizione  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$  nel seguente modo  $g_{ij}(x) = e^{i\phi(x)}$ ,  $g_{ji}(x) = e^{-i\phi(x)}$ , dove  $\phi(x)$  è una funzione a valori reali definita su  $U_i \cap U_j$ . Allora, la legge di trasformazione dei potenziali sotto un cambio di gauge è data da

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{v}) = \mathbf{A}_j(\mathbf{v}) + \frac{1}{e}\phi'(x)\mathbf{v} \quad (4.24)$$

ossia, in coordinate

$$A_{i\mu}v^\mu = A_{j\mu}v^\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\phi(x)v^\mu. \quad (4.25)$$

Si può notare che questa legge di trasformazione è valida su  $U_i \cap U_j$ , ossia quando i potenziali sono definiti su aperti omeomorfi a  $\mathbf{R}^n$ .

<sup>9</sup>La forma canonica o forma di Maurer-Cartan  $\theta$  su un gruppo di Lie è una 1-forma a valori nell'algebra di Lie  $\mathcal{G}$  di  $G$  definita attraverso la relazione:  $\theta(\mathbf{v}_g) = (L_g^{-1})'\mathbf{v}_g = g^{-1}\mathbf{v}_g$  (nel caso in cui  $G$  sia il gruppo  $GL(n)$  o un suo sottogruppo).

## 4.4 Curvatura

Sia  $(P, X, \pi, G)$  un fibrato principale con connessione  $\omega$ . Sia  $h : T_p(P) \rightarrow H_p$  tale che  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_H$ .

**Definizione 23.** La **derivata covariante esterna**  $D\varphi$  di una  $r$ -forma  $\varphi = \varphi^\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha$  su  $P$  a valori in qualche spazio vettoriale con base  $\{\mathbf{e}_\alpha\}$  è la  $(r+1)$ -forma definita nel modo seguente

$$D\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r+1}) = d\varphi(h\mathbf{v}_1, \dots, h\mathbf{v}_{r+1}) \quad (4.26)$$

dove  $d\varphi = (d\varphi^\alpha) \otimes \mathbf{e}_\alpha$  è il differenziale esterno.

**Definizione 24.** La 2-forma

$$\Omega = D\omega \quad (4.27)$$

su  $P$  a valori in  $\mathcal{G}$  è chiamata **forma curvatura** della connessione  $\omega$ .

**Proposizione 25 (Equazione strutturale di Cartan).** *Se  $\omega$  è una connessione su  $P$  e  $\Omega = D\omega$ , allora si ha*

$$\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + [\omega(\mathbf{u}), \omega(\mathbf{v})] = d\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (4.28)$$

**Osservazione 26.** In una banalizzazione locale  $(U_i, \phi_i)$  la 2-forma  $\Omega$  su  $\pi^{-1}(U_i)$  è rappresentata dalla 2-forma  $\bar{\Omega}_i$  su  $U_i$ , definita attraverso la sezione  $s_i$ :

$$\bar{\Omega}_i = s_i^* \Omega, \quad \text{con } s_i = \phi_i^{-1} \circ \bar{\text{Id}}. \quad (4.29)$$

Sfruttando l'equazione di Cartan, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_i &= s_i^* \Omega = s_i^* (d\omega + [\omega, \omega]) = \\ &= d(s_i^* \omega) + s_i^* [\omega, \omega] = \\ &= d\bar{\omega}_i + \frac{1}{2}[\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_i]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nel caso in cui il gruppo strutturale  $G$  sia abeliano, l'ultima equazione si semplifica ulteriormente:

$$\bar{\Omega}_i = d\bar{\omega}_i, \quad (4.31)$$

Si consideri adesso il fibrato  $(P, X, \pi, U(1))$ , con  $X \sim_{omeo} \mathbf{R}^4$  lo spaziotempo e  $U(1)$  il gruppo unitario (abeliano). Dal momento che  $\mathbf{R}^4$  è contraibile, il fibrato  $P$  è banalizzabile<sup>10</sup> e ha, dunque, senso parlare di una connessione globale  $\bar{\omega}$  (pull-back di una connessione  $\omega$  su  $P$ ) su  $X$  e della sua relativa 2-forma curvatura  $\bar{\Omega}$  (pull-back della curvatura  $\Omega$  su  $P$ ). Inoltre,

$$\bar{\Omega} = d\bar{\omega}$$

<sup>10</sup>Un fibrato è banalizzabile se è riducibile ad un fibrato banale. In generale si dice che un fibrato (principale)  $(P, X, \pi, G)$  è **riducibile** al fibrato  $(P_1, X, \pi_1, G_1)$  se  $G_1$  è un sottogruppo di  $G$ ,  $P_1$  è un sottospazio di  $P$  e valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \pi \circ i(p) &= \pi_1(p), \quad \forall p \in P_1 \\ i(\tilde{R}_g p) &= \tilde{R}_g(i(p)), \quad \forall p \in P_1, g \in G_1 \end{aligned}$$

dove  $i : P_1 \hookrightarrow P$  è la mappa inclusiva.

e rappresenta il campo elettromagnetico, mediante la seguente relazione:

$$\bar{\Omega} = ie\mathbf{F} \quad (4.32)$$

$$= -\frac{1}{2}ieF_{\alpha\beta}\mathbf{dx}^\alpha \wedge \mathbf{dx}^\beta \quad (4.33)$$

dove  $\mathbf{F}$  è la 2-forma sullo spaziotempo rappresentante il campo elettromagnetico (vedi il capitolo 2.1).

Il primo blocco delle equazioni di Maxwell<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} \mathit{div}\mathbf{H} &= 0 \\ \mathit{rot}\mathbf{E} + \dot{\mathbf{H}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

può essere riscritto nel seguente modo:

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0, \quad (4.35)$$

ossia

$$d\mathbf{F} = 0. \quad (4.36)$$

Tale espressione è nota con il nome di **identità di Bianchi**. Quindi, la 2-forma  $\mathbf{F}$  è chiusa su  $X$ . D'altra parte, questo risultato è conseguenza del fatto che la 2-forma curvatura è esatta:  $\bar{\Omega} = d\bar{\omega}$ . Allora  $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A} = (V, \mathbf{A})$  (detto **quadripotenziale**) o, equivalentemente,  $\mathbf{H} = \mathit{rot}\mathbf{A}$  e  $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla V$  (si vedano le equazioni di Maxwell nel capitolo 2)<sup>12</sup>.

## 4.5 Discussione sul fibrato principale associato ad un monopolo

Le equazioni di Maxwell possono contemplare l'esistenza di cariche magnetiche isolate.

Un monopolo di carica  $g$ , posto nell'origine del sistema di riferimento, creerebbe un campo magnetico  $\mathbf{H}$  (=  $\mathbf{B}$  nel vuoto) che soddisfa l'equazione

$$\mathit{div}\mathbf{H} = 4\pi g\delta(\mathbf{x}). \quad (4.37)$$

Poiché il campo  $\mathbf{H}$  presenta una singolarità nell'origine, dove è presente il monopolo, le equazioni di Maxwell sono soddisfatte su una sottovarietà dello spaziotempo, ottenuta da  $\mathbf{R}^4$  eliminando la linea d'universo  $\ell$  relativa al monopolo fisso nell'origine.

Tuttavia, il campo  $\mathbf{H}$  non può essere descritto da un potenziale vettore  $\mathbf{A}$ , come succede nel caso privo di monopoli, e la 2-forma  $\mathbf{F}$  non è globalmente esatta.

Infatti, il fibrato deve essere non banalizzabile, dal momento che l'esistenza di una sezione globale  $s$  fornirebbe un modo per definire il potenziale  $\mathbf{A}$  globalmente sullo spaziotempo, ponendo  $\mathbf{A} = s^*\omega$ .

<sup>11</sup>In questo caso sono state scelte le unità di misura in modo tale che  $c = 1$ .

<sup>12</sup>Questo risultato può essere spiegato anche nel seguente modo: poiché  $\mathbf{R}^4$  è contraibile, il suo secondo gruppo di coomologia è banale e questo garantisce che ogni 2-forma chiusa su  $\mathbf{R}^4$  sia anche esatta.

I fibrati con base  $\mathbf{R}^n$  (contraibile) sono banalizzabili; d'altra parte, lo spaziotempo in cui è descritto il monopolo  $X = \mathbf{R}^4 \setminus \{\ell\}$  non è contraibile.

Anche i fibrati principali (su uno spazio metrico) con gruppo di struttura, e quindi con fibra, contraibile (ad esempio,  $\mathbf{R}^n$ ) sono banalizzabili; quindi, un monopolo magnetico può essere descritto soltanto se si sceglie  $U(1)$  come gruppo di gauge per l'elettromagnetismo ( $U(1) \sim_{omeo} S^1$  non è contraibile a differenza del gruppo  $(\mathbf{R}, +)$ ).

Per costruire un fibrato  $U(1)$  appropriato per la descrizione di un particolare polo magnetico, si possono definire diversi potenziali sugli aperti di un ricoprimento di  $X$  in modo tale che sulle zone di sovrapposizione i potenziali differiscano per una trasformazione di gauge, cosicché il campo magnetico definito in un qualunque punto è equivalente ad un campo creato da un polo collocato nell'origine.

Queste trasformazioni di gauge possono essere usate per definire le funzioni di transizione  $g_{ij}$  di un fibrato principale  $U(1)$  su  $X$ ; i potenziali possono, quindi, essere interpretati come i pull-back di una 1-forma connessione definita globalmente sul fibrato attraverso le sezioni locali  $s_i$ .

Dal momento che  $\mathbf{R}^4 \setminus \{\ell\}$  è omeomorfa a  $\mathbf{R}^2 \times S^2$  e  $\mathbf{R}^2$  è contraibile, la classificazione di questi fibrati si riduce alla classificazione di fibrati  $U(1)$  su  $S^2$ .

Se si ricopre  $S^2$  con due fogli che si sovrappongono in una banda arbitrariamente sottile attorno all'equatore ( $\sim_{htp} S^1$ ), si nota che la scelta delle funzioni di transizione si riduce essenzialmente alla scelta di una mappa continua  $S^1 \rightarrow U(1)$ .

I fibrati sono dunque individuati dai differenti modi con cui si può scegliere questa mappa. Si può dimostrare che altre scelte di ricoprimento della varietà  $S^2$  non portano a nuove possibilità.

## 4.6 La condizione di quantizzazione e il Teorema di Gauss-Bonnet

**Definizione 27.** Siano  $(P, X, \pi, G)$  un fibrato principale,  $\omega$  una connessione su  $P$  e  $\Omega$  la sua curvatura. Una **classe caratteristica** è un elemento della classe di coomologia di De Rham  $H^q(X)$ <sup>13</sup>, quindi una  $q$ -forma chiusa, definita a partire dalla forma curvatura  $\Omega$  su  $X$ .

**Classe di Chern.** Consideriamo un fibrato vettoriale<sup>14</sup> complesso  $E$  su una varietà differenziabile (reale)  $X$ , con fibra tipica  $\mathbf{C}^m$  e gruppo strutturale  $GL(m, \mathbf{C})$  e il suo fibrato principale associato<sup>15</sup>  $(P, X, \pi, GL(m, \mathbf{C}))$ . Sia  $\Omega$  la forma curvatura di una qualche connessione  $\omega$  su  $P$ .

<sup>13</sup>Viene definito  $q$ -esimo gruppo di coomologia di uno spazio topologico  $X$  il gruppo quoziente  $H^q(X) = \frac{Z^q(X)}{B^q(X)}$ , dove  $Z^q$  è il gruppo libero delle forme chiuse e  $B^q$  è il gruppo libero delle forme esatte.

<sup>14</sup>Un fibrato vettoriale è un fibrato in cui la fibra tipica  $F$  è uno spazio vettoriale e il gruppo  $G$  è il gruppo lineare.

<sup>15</sup>Si dice che un fibrato vettoriale  $(E, X, \pi_1, F, G)$  è associato al fibrato principale  $(P, X, \pi, G)$  tramite la rappresentazione  $\rho$  di  $G$  se le sue funzioni di transizione sono le immagini, sotto  $\rho$ , delle corrispondenti funzioni di transizione del fibrato principale  $P$ .

La  $n$ -esima classe di Chern  $C_n(E)$  del fibrato vettoriale complesso su  $X$  è la classe di coomologia di una  $2n$ -forma chiusa  $\gamma_n$  su  $X$ , definita come segue

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n (n)!} \epsilon_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n} \bar{\Omega}_{j_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{\Omega}_{j_n}^{i_n} \quad (4.38)$$

se si esprime la forma curvatura su  $X$  come 2-forma a valori nello spazio delle matrici  $(\bar{\Omega}_j^i)^{16}$ .

In particolare si ha

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = -(2\pi i)^{-1} \text{tr} \bar{\Omega}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} (2\pi i)^{-2} ((\text{tr} \bar{\Omega})^2 - \text{tr}(\bar{\Omega} \wedge \bar{\Omega})), \quad \dots \quad (4.39)$$

Nel caso di un monopolo magnetico, la forma curvatura locale è

$$\bar{\Omega}_+ = ie\mathbf{F}_+ \quad \text{su } U_+ = \{\text{calotta superiore}\} \quad (4.40)$$

$$\bar{\Omega}_- = ie\mathbf{F}_- \quad \text{su } U_- = \{\text{calotta inferiore}\} \quad (4.41)$$

e l'unica classe di Chern non banale è la prima:

$$\gamma_1|_{U_\pm} = -\frac{e}{2\pi} \mathbf{F}_\pm, \quad \gamma_n = 0 \quad \forall n \geq 2. \quad (4.42)$$

**Classe di Eulero.** La classe di Eulero di una varietà differenziabile orientata  $X$  di dimensione pari  $2n$  è la classe caratteristica del fibrato tangente rappresentata dalla seguente  $2n$ -forma chiusa su  $X$ :

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n (n)!} \epsilon_{i_1, \dots, i_{2n}}^{1, \dots, 2n} \bar{\Omega}_{i_2}^{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{\Omega}_{i_{2n}}^{i_{2n-1}} \quad (4.43)$$

dove  $\bar{\Omega}_j^i$  è la 2-forma curvatura di una connessione riemanniana su  $X^{17}$ .

Una classe caratteristica è un'invariante topologica del fibrato a cui è riferita; questo è vero anche per l'integrale di un suo rappresentante lungo un ciclo sulla varietà di base  $X$ . L'invariante più conosciuto di questo tipo è il numero di Eulero di una varietà di dimensione pari  $X$ , che è l'integrale su  $X$  della classe di Eulero del suo fibrato tangente.

**Proposizione 28 (Teorema di Gauss-Bonnet).** *Sia  $X$  una varietà  $2n$ -dimensionale, orientata, compatta e riemanniana; sia  $\gamma$  la sua classe di Eulero e  $\chi$  la caratteristica di Eulero-Poincaré<sup>18</sup>. Allora*

$$\chi(X) = \int_X \gamma_n \quad (4.44)$$

*il numero di Eulero di  $X$  è uguale alla sua caratteristica.*

<sup>16</sup> $\epsilon_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_n}$  è il tensore di Kronecker: esso vale 0 se  $(j_1, \dots, j_n)$  non è una permutazione di  $(i_1, \dots, i_n)$ , +1 se  $(j_1, \dots, j_n)$  è una permutazione pari di  $(i_1, \dots, i_n)$ , -1 se è una permutazione dispari.

<sup>17</sup>Una connessione riemanniana è una particolare connessione definita su una varietà riemanniana a partire dal tensore metrico  $\mathbf{g}$ .

<sup>18</sup>Se  $X$  è una varietà di dimensione  $n$ , allora la sua caratteristica è uguale a

$$\chi(X) = \sum_{q=0}^n (-1)^q b_q$$

dove, per ogni  $q$ ,  $b_q$  è il numero di Betti, ossia la dimensione del  $q$ -esimo gruppo di omologia.

**Osservazione 29.** I coefficienti della classe di Eulero  $\gamma$  sono stati scelti in modo tale che il numero di Eulero sia un intero.

Altri importanti invarianti topologici per i fibrati vettoriali complessi sono i numeri di Chern. È possibile mostrare, sfruttando il teorema di Gauss-Bonnet, che l'integrale di un rappresentante della  $k$ -esima classe di Chern  $C_k$  lungo un  $2k$ -ciclo in  $X$ , con gli opportuni coefficienti, è un intero.

Il nome di “numero di Chern” viene solitamente dato solo all'integrale calcolato su tutta la varietà  $n$ -dimensionale di un rappresentante della classe caratteristica di grado  $n$ .

Nel caso fisico di un monopolo magnetico ( $X \sim_{omeo} \mathbf{R}^2 \times S^2 \sim_{htp} S^2$ ,  $G = U(1)$  gruppo strutturale), vi è un unico numero di Chern:

$$C_1 = \int_{S^2} \gamma_1 = -\frac{e}{2\pi} \left( \int_{U_+} \mathbf{F}_+ + \int_{U_-} \mathbf{F}_- \right) \quad (4.45)$$

$\mathbf{F}_\pm$  è chiusa sul rispettivo dominio di definizione  $U_\pm \sim_{omeo} \mathbf{R}^2$  contraibile, quindi tale forma è anche esatta:

$$\mathbf{F}_\pm = d\mathbf{A}_\pm \quad (4.46)$$

È dunque possibile applicare il teorema di Stokes ai due integrali scritti prima:

$$C_1 = -\frac{e}{2\pi} \left( \int_{S^1} \mathbf{A}_+ - \int_{S^1} \mathbf{A}_- \right) = -\frac{e}{2\pi} \int_{S^1} (\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-) \quad (4.47)$$

dove il segno  $-$  è dovuto al fatto che la circuitazione del potenziale  $\mathbf{A}_-$  avviene in senso opposto a quella del potenziale  $\mathbf{A}_+$ . I due potenziali, inoltre, differiscono per una trasformazione di gauge, come si è visto nell'espressione (3.30):

$$\mathbf{A}_- = \mathbf{A}_+ - 2g d\varphi \quad (4.48)$$

dove  $g$  è la carica del monopolo.

In conclusione, il numero di Chern è uguale a

$$C_1 = \frac{e}{2\pi} \int_{S^1} (-2g) d\varphi = -2eg \quad (4.49)$$

Dal momento che il numero di Chern, per il teorema di Gauss-Bonnet, è un intero, il prodotto di una carica elettrica e della carica di un monopolo è pari a

$$eg = \frac{n}{2} \quad \text{con } n \in \mathbf{Z}; \quad (4.50)$$

ma questa relazione è esattamente la condizione di quantizzazione enunciata nel capitolo 1, pur di scegliere le unità di misura tali che  $\hbar = 1$  e  $c = 1$ .

Si è visto, quindi, che è possibile dare una derivazione alternativa della condizione di quantizzazione di Dirac utilizzando argomenti strettamente matematici e non solo attraverso ragionamenti fisici.

## Capitolo 5

# Conclusioni e sviluppi successivi

Nel corso del XX secolo, furono compiuti una serie di esperimenti di ricerca dei monopoli nei raggi cosmici. Altri fisici li hanno cercati nella materia stabile, in particolare, nelle rocce lunari e nelle rocce delle profondità marine. Altre ricerche, infine, sono state fatte con gli acceleratori di particelle.

Ad ogni modo, la verifica sperimentale dell'esistenza dei monopoli magnetici non è ancora stata realizzata e lo stesso Dirac, nell'ultimo periodo della sua vita (1981), ormai deluso dalla mancanza di conferme empiriche, giunse ad esprimere l'opinione che i monopoli magnetici non esistano.

Restano particolarmente significative, a riguardo, due espressioni di importanti fisici contemporanei. Nel 1984, il fisico Giacomelli definì scherzosamente il monopolio come una “ben nota particella che non si è trovata” (“well known missing particle”). Una ventina d'anni prima, invece, E. Amaldi commentò così le sue ricerche sui monopoli:

*Uno dei pochi esempi di idee brillanti che sono rimaste in qualche modo al di fuori delle grosse correnti di evoluzione della fisica senza trovare sino ad oggi né gli indispensabili collegamenti con le osservazioni sperimentali né argomenti teorici che provano la loro incompatibilità con le leggi della natura solidamente fondate.*

La straordinaria intuizione di Dirac del monopolio ha generato, tuttavia, molti sviluppi teorici interessanti. Quando l'elettromagnetismo viene generalizzato, per descrivere le interazioni nucleari deboli e forti, con il formalismo delle teorie di gauge o teorie di Yang-Mills, si trovano stati eccitati dei campi che appaiono a grandi distanze come monopoli magnetici. In questa loro incarnazione moderna i monopoli non presentano tuttavia una linea nodale, o stringa di Dirac, che li accompagna.

I monopoli fanno la loro comparsa anche nelle cosiddette Teorie di Grande Unificazione (GUT), che descrivono l'emergere delle forze fondamentali nell'universo primordiale. Queste teorie prevedono che i monopoli si siano formati nel momento in cui l'elettromagnetismo si separò dalle altre forze.

Negli ultimi anni le previsioni teoriche della loro comparsa si sono moltiplicate, al punto che i monopoli vengono oggi considerati un naturale prodotto

di qualsiasi teoria di campo, e non solo dell'elettromagnetismo. Essi compaiono anche nella teoria delle stringhe, come *brane* con carica magnetica, e nella superconduttività, come flussi magnetici quantizzati.

In definitiva, i monopoli sembrano svolgere un ruolo fondamentale nell'odierna concezione della natura.

# Elenco delle figure

3.1	Una particella carica passa accanto ad un monopolo magnetico. .	11
3.2	Campo creato da una particella di carica elettrica puntiforme in presenza di un monopolo magnetico. . . . .	13
3.3	Due rappresentazioni del monopolo magnetico e della stringa di Dirac. . . . .	16
3.4	La spirale $\gamma$ nel caso $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ . . . . .	18
3.5	Due corde diverse $L$ e $L'$ danno potenziali vettori di monopolo che differiscono per una trasformazione di gauge. . . . .	19
3.6	Varietà sferica $S^2$ suddivisa in due regioni. . . . .	21
3.7	Due sistemi di coordinate ricoprono interamente la sfera $S^2$ e costituiscono un'atlante per tale varietà. . . . .	22
4.1	(proiezione canonica) $\circ \phi_j = \pi$ . . . . .	26
4.2	Rappresentazione grafica dell'omeomorfismo $g_{jk}(x)$ . . . . .	26
4.3	Costruzione di un nastro di Möbius: i punti con la stessa etichetta $A, B, C, D$ sono identificati. . . . .	27
4.4	Schematizzazione dell'azione destra di $G$ . La mappa puntinata è $g_{ij}(x)$ ed è, per definizione, una traslazione sinistra. . . . .	28

# Bibliografia

- [1] A. M. Aloisi and P. F. Nali. Dirac e il monopolo magnetico. <<http://ulisse.sissa.it/biblioteca/saggio/2004/Ubib041201s004>>, 2004.
- [2] Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, manifolds and physics. Volume I: Basics*. North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [3] S. D'Agostino. Dirac: la ragionevole potenza della matematica (La matematizzazione della fisica nell'opera di Dirac). In *Atti del XXI Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell'Astronomia*, pages 78–91, 2001. Disponibile all'indirizzo: <<http://www.brera.unimi.it/sisfa/atti/atti2001.html>>.
- [4] P. A. M. Dirac. Quantized singularities in the electromagnetic field. In *Proceedings of the Royal Society*, London, 1931.
- [5] J. M. Figueroa-O'Farrill. Electromagnetic duality for children. <<http://www.maths.ed.ac.uk/jmf/Teaching/EDC.html>>, 1998.
- [6] A. S. Goldhaber. P. R. L. 140. Number B1407, 1965.
- [7] John D. Jackson. *Elettrodinamica classica*. Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1984.
- [8] J. J. Thomson. *Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*. Cambridge University Press, Cambridge, 1904.
- [9] C. N. Yang. *Lectures on Frontiers in Physics*. Korean Physical Society, Seoul, 1980.