UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,
FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

RILASSAMENTO TEMPORALE DI UN MODELLO DI "PHASE-FIELD" CON LEGGE DI BILANCIO DELL'ENTROPIA

Relatore
Dott.ssa Elisabetta ROCCA

Tesi di Laurea di
Manuela GIROTTI
matricola n. 746734

Anno Accademico 2009/2010

οὐδ’ ὁ γέρων δολίης ἐπελήϑετο τέχνης,
ἀλλ’ ἤ τοι πρώτιστα λέων γένετ′ ἠϋγένειος,
αὐτὰπ ἔπειτα δράκων καὶ πάρδαλις ἠδὲ μέγας σῦς·
γίγνετο δ’ὑδρὸν ὕδωρ καὶ δένδρεον ὑψιπέτηλον.

[...] ma il Vecchio non scordò la sua arte ingannevole,
prima di tutto divenne chiomato leone,
e poi serpente e pantera e immane cinghiale;
liquida acqua si fece poi, albero d’alto fogliame.

Omero, Odissea, Libro IV, 455-458

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Il sistema di equazioni alle derivate parziali. In questa tesi si esamina un sistema costituito da due equazioni alle derivate parziali accoppiate, che descrivono l'evoluzione di una sostanza soggetta a transizioni di fase. Si tratta, in particolare, di equazioni paraboliche di secondo grado non lineari, delle quali la prima fornisce una legge di evoluzione della temperatura assoluta ϑ e la seconda regola il comportamento di un parametro di fase χ.

Si ricordi che si definisce "fase" una totalità di tutte le porzioni di un sistema termodinamico che sono fisicamente uniformi quando non agisce alcuna forza esterna (si veda [8]); esempi di fasi sono gli stati fisici della materia: solido, liquido e gassoso.

Si definisce, dunque, "transizione di fase" la trasformazione di una sostanza da una fase ad un'altra; per poter identificare una trasformazione di fase è necessario individuare un'opportuna quantità fisica che differisca nelle due fasi. Nella teoria di Landau, tale quantità è chiamata "parametro d'ordine", o "parametro di fase", ed è generalmente un tensore.

Si distinguono due tipi di transizione di fase: del primo ordine e del secondo ordine. La transizione del primo ordine è una transizione di fase caratterizzata dal rilascio o dall'assorbimento di energia sotto forma di calore latente, mentre l'energia interna e la densità presentano dei salti di discontinuità; esempi di tale transizione possono essere la fusione, la sublimazione o la transizione di alcuni solidi da una forma cristallina ad un'altra.

La transizione del secondo ordine è, invece, caratterizzata da un comportamento continuo dell'energia interna e della densità, mentre non avviene lo scambio di calore latente; ad ogni modo, in tali transizioni si riscontrano delle discontinuità nel coefficiente termico di espansione o nel calore specifico. L'esempio classico di una transizione del secondo ordine è la transizione di una sostanza ferromagnetica in una paramagnetica ad una temperatura pari alla temperatura di Curie.

Il sistema preso in esame in questa tesi descrive una transizione di fase del primo ordine, tramite un campo scalare come parametro di fase: in particolare, è costituito da una legge di bilancio dell'entropia, che regola l'evoluzione della temperatura ϑ, e da una legge di bilanciamento delle microforze, che descrive il comportamento della variabile di fase χ. Ad esempio, in una transizione di fase di tipo solido-liquido, χ rappresenta la proporzione locale della fase liquida.

Per quanto riguarda l'equazione dell'entropia, la caratteristica principale consiste nella presenza di un contributo logaritmico per la temperatura: grazie a ciò, dopo aver risolto il problema, la positività della temperatura assoluta è automaticamente garantita. L'equazione per il parametro di fase, invece, è costruita a partire da un'equazione di equilibrio per le microforze, ossia l'equazione di bilancio del momento dei micromovimenti, che sono responsabili della transizione di fase macroscopica nel sistema.

Più in particolare, il problema di Cauchy (P_μ) che sarà studiato nel dominio spazio-temorale $Q := \Omega \times (0, T)$ è della forma

$$
\begin{array}{ll}
\partial_t(\log \vartheta + \chi) - \Delta\vartheta = g & \text{in } Q \\
\mu\chi_t - \Delta\chi + \xi + \sigma'(\chi) = \vartheta & \text{in } Q \\
\xi \in \partial\beta(\chi) & \text{in } Q \\
\nabla\vartheta \cdot \nu + \alpha\vartheta = h & \text{su } \partial\Omega \times (0, T) \\
\partial_\nu \chi = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T) \\
\log \vartheta(0) = \log \vartheta_0 & \text{in } \Omega \\
\chi(0) = \chi_0 & \text{in } \Omega,
\end{array}
$$

dove Ω è una porzione dello spazio fisico $\mathbf{R}^3$ occupata dal materiale e T è la durata del processo. Le funzioni g e h rappresentano delle sorgenti di calore (interna e sul bordo). La funzione β è una opportuna funzione propria, convessa e semicontinua inferiormente, il cui sottodifferenziale, indicato come $\partial\beta$, è un grafico massimale monotono; assieme alla derivata della funzione σ, funzione C^1 con derivata lipschitziana, costituisce un termine non lineare che impone eventuali restrizioni sul parametro di fase χ. Il coefficiente $\mu > 0$ è un coefficiente di rilassamento temporale, piccolo nelle applicazioni.

Il problema (P_μ) è completato dai dati iniziali e dalle condizioni al bordo: una condizione di Robin per la variabile ϑ e una condizione di Neumann omogenea per la variabile χ. La funzione α è una funzione positiva definita sulla frontiera parabolica $\partial\Omega \times (0, T)$; ν indica il versore normale esterno e, corrispettivamente, la notazione ∂_ν indica la derivata normale esterna. I dati iniziali sono rappresentati da due funzioni ϑ_0 e χ_0 definite su Ω, di cui in particolare $\vartheta_0 > 0$ su Ω.

In questa Introduzione non verrà esposta in modo dettagliato la derivazione del modello, poichè ciò sarà svolto nel Capitolo 2; il sistema è stato introdotto e studiato da Bonetti *et al.* negli articoli [2] e [3], in cui si derivava esplicitamente il modello e si analizzava la buona positura del problema per $\mu > 0$ fissato e con una condizione al bordo di Dirichlet per la variabile ϑ.

I risultati. Il primo obiettivo della tesi è la dimostrazione della buona positura di tale problema riscritto in un'opportuna formulazione variazionale.

$$\begin{array}{ll} \partial_t\left(\log\vartheta+\chi\right)+B\vartheta=w & \text{in } (H^1(\Omega))' \text{ e q.o. in } (0,T) \\ \mu\partial_t\chi+A\chi+\xi+\sigma'(\chi)=\vartheta & \text{q.o. in } Q \\ \xi\in\partial\beta(\chi) & \text{q.o. in } Q \\ \log\vartheta(0)=\log\vartheta_0 & \text{q.o. in } \Omega \\ \chi(0)=\chi_0 & \text{q.o. in } \Omega, \end{array}$$

con $A : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$ e $B : H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))'$ operatori definiti nel seguente modo

$$\langle Bu,v\rangle=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx+\int_\Gamma \alpha\, u\, v ds \quad \forall\, u,v\in H^1(\Omega)$$
$$\langle Au,v\rangle=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx \quad \forall\, u,v\in H^1(\Omega);$$

$(H^1(\Omega))'$ è il duale dello spazio di Hilbert $H^1(\Omega)$.

La prima difficoltà da superare riguarda i termini non lineari che compaiono nel sistema (in particolare il termine logaritmico e il grafico massimale monotono $\partial\beta$).

Si procede, quindi, con una doppia approssimazione del sistema: inizialmente si regolarizzano i termini non lineari mediante delle opportune funzioni lipschitziane, indicizzate da un parametro ε, e si considerano dei nuovi dati iniziali, anch'essi più regolari; successivamente, si procede con una procedura di discretizzazione in spazio di tipo Faedo-Galerkin per risolvere il problema (P_ε), ad ε fissato.

Dopo aver dimostrato l'esistenza del problema regolarizzato (P_ε), si passa al limite per ε tendente a zero e si perviene all'esistenza della soluzione del problema originale, che risulterà poi essere unica e dipendente in modo continuo dai dati.

Il secondo obiettivo è lo studio del comportamento asintotico al tendere del parametro μ a zero. In particolare, si dimostrerà che il problema in esame (P_μ), con $\mu > 0$, converge ad un problema (P_0) in cui non compare il termine di derivata temporale nell'equazione di fase.

Tale convergenza implica, di conseguenza, che la successione di soluzioni legate ai problemi (P_μ) converge (in un senso opportuno) alla soluzione del problema (P_0).

Il problema limite è interessante dal punto di vista fisico, poichè nelle applicazioni concrete il parametro μ è solitamente una quantità piccola, rispetto alle altre quantità fisiche che agiscono nella transizione di fase (si veda ad esempio [15], Sez. 4): in particolare il tempo di rilassamento μ è più piccolo del coefficiente di energia di interfaccia, che è il coefficiente del termine Laplaciano nell'equazione di fase (nel nostro caso, normalizzato ad 1). Ciò vuol dire che il rilassamento verso una situazione di equilibrio avviene più velocemente rispetto alla diffusione della fase.

Le principali difficoltà incontrate nell'affrontare il problema sono principalmente le condizioni al bordo imposte e la perdita di regolarità temporale della variabile di fase, e di conseguenza del termine $\log\vartheta_\mu$, al tendere di μ a zero.

Imponendo le condizioni di Robin per la variabile temperatura, compaiono nell'equazione variazionale per ϑ alcuni termini di bordo che devono essere studiati, sfruttando opportuni teoremi di traccia.

Per quanto riguarda il comportamento asintotico, dal momento che il problema limite presenta un'equazione di fase ellittica non lineare, non è più possibile derivare un stima uniforme per la derivata in tempo della variabile χ e, di conseguenza, utilizzare noti risultati di compattezza. Sarà necessario ricorrere ad un metodo alternativo, imponendo opportune ipotesi sui termini sorgente e sulle non linearità β e σ e introducendo un'opportuna generalizzazione della funzione $\log \vartheta$ che verrà vista come operatore massimale monotono in $(H^1(\Omega))'$.

La letteratura precedente. Non è obiettivo di questa tesi ricostruire la letteratura completa per i modelli di transizione di fase, che risulta troppo vasta per essere qui dettagliata (si veda ad esempio [8], [17], [28]). Ci limitiamo, dunque, a citare i contributi relativi ai sistemi con legge di bilancio dell'entropia.

Il modello in esame è stato proposto e precedentemente studiato da Bonetti *et al.* in [2] e [3]. Tuttavia, il nostro sistema risulta semplificato in alcune scelte rispetto a quello studiato in [2] e [3]: infatti, in quei lavori compare nell'equazione per la temperatura un termine che tiene conto di un possibile effetto di memoria termica della sostanza soggetta a transizione di fase.

Inoltre, il termine legato al calore latente, indicato come $\lambda(\chi)$ in Bonetti *et al.*, non è costante, ma è una generica funzione del parametro di fase. La condizione al bordo per la variabile ϑ è una condizione di Dirichlet non omogenea in [2] e [3], mentre è scopo di questa tesi trattare il caso Robin, che introduce nuove difficoltà dal punto di vista della dimostrazione dell'esistenza della soluzione.

La costruzione esplicita del modello viene presentata da Bonetti *et al.* in [2], in cui si svolge in aggiunta uno studio del comportamento delle soluzioni per tempi lunghi. Scopo principale di questa tesi, invece, è studiare il comportamento asintotico per $\mu \searrow 0$ di (P_μ).

Un modello analogo, che presenta sempre un'equazione di bilancio dell'entropia per l'evoluzione della temperatura ϑ, invece della più usuale equazione di bilancio dell'energia interna, è stato studiato da Bonetti, Colli e Frémond in [4] e da Bonetti e Frémond in [5].

In entrambi gli articoli il termine logaritmico compare anche sotto l'operatore Laplaciano e le costrizioni sul parametro di fase sono rese esplicitamente mediante il sottodifferenziale della funzione indicatrice dell'intervallo $[0, 1]$ (cioè $\beta = \partial I_{[0,1]}$); per quanto riguarda l'equazione di fase, invece, essa è analoga a quella studiata in questa tesi nell'articolo [4], mentre risulta essere un'equazione alle derivate ordinarie nell'articolo [5] (compare soltanto la derivata temporale della variabile di fase, ma non il termine Laplaciano).

Per quanto riguarda lo studio del comportamento asintotico, nell'articolo [18] di Gilardi e Rocca, partendo dallo stesso modello proposto in [2] e [3], si è analizzata la convergenza a zero del coefficiente di energia di interfaccia, legato al termine laplaciano, nell'equazione di fase.

Nell'articolo di Visintin ([27], Sez. 3), in cui si introduce il cosiddetto modello di "phase-relaxation", viene studiato il comportamento di un modello di transizione di fase con legge di bilancio dell'energia al tendere a zero del parametro di rilassamento μ: in questo caso, si ha un'equazione di fase priva del termine Laplaciano (quindi, non presenta il termine di energia di interfaccia) e si dimostra che per $\mu \searrow 0$ il problema, con condizioni al bordo miste (una parte del bordo ha condizioni di Dirichlet e una parte ha condizioni di Neumann), converge al problema classico di Stefan.

Per uno studio analiticamente rigoroso del comportamento asintotico applicato ad una generalizzazione del sistema preso in esame (con la presenza di termini di memoria termica), si veda, invece, l'articolo [13] di Colli *et al.*

Schema della tesi. La tesi si articola in cinque capitoli: il Capitolo 2 si occupa della descrizione del modello matematico che sarà successivamente studiato da un punto di vista analitico nel Capitolo 4, dove si dimostrerà l'esistenza della soluzione per una opportuna formulazione variazionale di (P_μ) tramite una procedura di discretizzazione-stime a priori-passaggio al limite per compattezza e monotonia.

Nel Capitolo 4.2.4 si dimostra che la soluzione è unica e dipende in modo continuo dai dati. Nell'ultimo capitolo (Capitolo 5), infine, ci si occupa dello studio asintotico del problema al tendere a zero del coefficiente di rilassamento temporale μ.

Tutti i risultati della tesi (dimostrati nei Capitoli 4, 4.2.4 e 5) sono raccolti nel Capitolo 3.

Capitolo 2

Il modello

Nel presente capitolo si vuole ricavare, seguendo le linee guida dell'articolo [2], a partire da note leggi fisiche, un modello matematico che descriva un fenomeno di transizione di fase e che riconduca al sistema di equazioni alle derivate parziali introdotto in (P_μ).

La derivazione termomeccanica del modello condurrà ad un sistema di due equazioni differenziali non lineari accoppiate: la prima equazione, che deriva da un'equazione di bilanciamento dell'entropia, governerà la variabile temperatura, mentre l'equazione per il parametro di fase sarà costruita a partire da un'equazione di equilibrio per le microforze.

Tutto ciò che sarà enunciato in questo capitolo è puramente formale e le regolarità delle funzioni considerate verranno dettagliate nel Capitolo 3.

Si consideri una transizione di fase del primo ordine di un materiale che occupa una certa porzione Ω dello spazio fisico $\mathbf{R}^3$. Si supponga, inoltre, che tale dominio Ω sia sufficientemente regolare.

Le incognite del problema sono la temperatura assoluta $\vartheta \in (0, +\infty)$ e un campo scalare di fase χ. Da un punto di vista fisico, χ rappresenta la concentrazione locale o la proporzione riscalata di una fase rispetto all'altra ed è legata al moto delle particelle a livello microscopico.

Per garantire la consistenza termomeccanica del modello, sarà necessario introdurre delle opportune restrizioni su χ. Per esempio, se si assume che le due fasi coesistano in ogni punto del corpo con proporzioni diverse, risulta ragionevole richiedere che

$$\chi \in [0, 1], \tag{2.1}$$

ponendo $1 - \chi$ uguale alla proporzione della seconda fase. In particolare, i valori di $\chi = 0, 1$ corrispondono alle fasi pure, mentre i valori intermedi corrispondono ai casi in cui sono presenti entrambe le fasi (le cosiddette "mushy regions").

Un modo per imporre che χ assuma soltanto i valori nell'intervallo indicato consiste nell'includere nel funzionale di energia la funzione indicatrice dell'intervallo $[0, 1]$.

Ponendosi in un contesto più generale, le limitazioni sul paramentro di fase χ saranno descritte da una generica funzione propria, convessa e semicontinua inferiormente β, come si vedrà più avanti. La presenza di tale funzione nel funzionale di energia porterà ad una equazione di evoluzione per χ in cui comparirà il sottodifferenziale $\partial\beta$ di β, che è un grafico massimale monotono.

Innanzitutto, nello spirito dei modelli di transizione di fase introdotti da M. Frémond (si confronti, per esempio, [17]), si consideri la legge di bilanciamento per le microforze responsabili del processo termodinamico.

Si supponga che non agiscano sul corpo delle forze macroscopiche e che non si verifichino deformazioni durante il processo e si consideri il Principio delle Potenze Virtuali (si veda [17], Cap. 2)

$$P_a(S, \mathbf{V}, \chi_t) = P_i(S, \mathbf{V}, \chi_t) + P_e(S, \mathbf{V}, \chi_t) \quad \forall\, (S, \mathbf{V}, \chi_t), \tag{2.2}$$

ove S è un qualsiasi sotto dominio di Ω, $\mathbf{V}$ è il vettore delle velocità macroscopiche (nel caso in esame è identicamente nullo) e χ_t rappresenta, invece, le velocità microscopiche delle particelle, dette velocità virtuali.

Il termine P_i è la potenza virtuale delle forze interne: sia B la densità di volume della forza e $\mathbf{H}$ il vettore del flusso della forza, allora si ha

$$P_i = -\int_S B\chi_t + \mathbf{H} \cdot \nabla\chi_t \, dx; \tag{2.3}$$

si potrà notare in seguito che il vettore $\mathbf{H}$ è legato alle interazioni locali tra le particelle.

Il termine P_e è la potenza virtuale delle forze esterne: si distinguono due termini legati, rispettivamente, alle forze che agiscono sul corpo a distanza, oppure tramite contatto

$$P_e = \int_S b\chi_t \, dx + \int_{\partial S} a\chi_t \, d\sigma; \tag{2.4}$$

in particolare, a rappresenta la densità superficiale di forza esterna, mentre b rappresenta la densità di volume di forza fornita al materiale dall'esterno tramite azioni microscopiche; per esempio, b può essere un supporto di energia per irradiazione o per azione chimica o elettrica che modifica i legami microscopici della sostanza.

Infine, il termine P_a è la potenza virtuale delle forze di accelerazione

$$P_a = \int_S \widehat{\rho}\widehat{\gamma}\chi_t \, dx, \tag{2.5}$$

dove $\widehat{\rho}$ è una quantità proporzionale alla massa dei legami tra le particelle (è l'analogo microscopico della densità di materia); $\widehat{\gamma}$ è la derivata materiale di χ_t (è l'analogo microscopico dell'accelerazione).

Per semplicità si supponga che le accelerazioni microscopiche siano trascurabili e che la forza esterna di contatto a sia nulla sulla superficie esterna del corpo in considerazione. Riscrivendo esplicitamente i termini nel Principio delle Potenze Virtuali (2.2), si ottengono le seguenti equazioni di bilancio

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{H} + b &= B \quad \text{in } \Omega && (2.6) \\ \mathbf{H}\cdot\nu &= 0 \quad \text{su } \partial\Omega, && (2.7) \end{aligned}$$

dove ν è il versore normale diretto verso l'esterno del bordo di Ω.

Si consideri adesso la prima legge della termodinamica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\int_S e\,dx\right] &= -\int_{\partial S} \mathbf{q}\cdot\nu d\sigma + \int_S r\,dx + P_e(S,\chi_t) \\ &= -\int_{\partial S} \mathbf{q}\cdot\nu d\sigma + \int_S r\,dx + \int_{\partial S} \chi_t \mathbf{H}\cdot\nu d\sigma + \int_S \chi_t b\,dx, \quad (2.8) \end{aligned}$$

per ogni S sottodominio di Ω, dove e è l'energia interna, $\mathbf{q}$ è il flusso di calore, r una sorgente di calore supplementare. Il significato di questa equazione è il seguente: la variazione totale di energia interna è data dal flusso di calore lungo il bordo, il supplemento di calore e il lavoro delle microforze esterne e sul bordo, legate al processo di transizione di fase.

A questo punto, si ricava la prima legge in forma locale, detta anche legge di bilanciamento dell'energia interna

$$\begin{aligned} e_t &= -\mathrm{div}\mathbf{q} + r + \mathrm{div}(\mathbf{H}\chi_t) + b\chi_t \\ &= -\mathrm{div}\mathbf{q} + r + \mathrm{div}(\mathbf{H})\chi_t + \mathbf{H}\cdot\nabla\chi_t + b\chi_t \\ &= -\mathrm{div}\mathbf{q} + r + \mathbf{H}\cdot\nabla\chi_t + B\chi_t. \quad (2.9) \end{aligned}$$

La prima legge tiene conto della possiblità di trasformare lavoro in calore e viceversa, sotto la restrizione che l'energia totale sia conservata. Tuttavia, essa è insufficiente per poter descrivere un processo termodinamico, poiché non indica la direzione verso cui esso evolverà.

È, dunque, necessario ricorrere alla seconda legge della termodinamica, che afferma quanto segue: tutte le soluzioni del sistema di equazioni che governano un processo termodinamico devono soddisfare la cosiddetta disuguaglianza dell'entropia, ossia

$$\frac{d}{dt}\left[\int_S \eta\,dx\right] \geq -\int_{\partial S} \frac{1}{\vartheta}\mathbf{q}\cdot\nu\,d\sigma + \int_S \frac{r}{\vartheta}\,dx \quad \forall\, S \subseteq \Omega, \qquad (2.10)$$

ove η rappresenta l'entropia, $\mathbf{Q} := \mathbf{q}/\vartheta$ è il vettore del flusso di entropia, $w := r/\vartheta$ è il tasso di entropia ricevuto dall'esterno.

A livello locale, si ottiene la disuguaglianza di Clausius-Duhem

$$\eta_t \geq -\mathrm{div}\mathbf{Q} + w. \qquad (2.11)$$

Infine, per completare la trattazione del modello fisico, è necessario specificare il funzionale dell'energia libera Ψ, che dipende dall'insieme delle variabili di stato.

Si supponga che la stessa espressione per l'energia libera possa essere usata per tutte le fasi e per tutte le regioni instabili; è necessario, inoltre, tenere in considerazione gli effetti locali delle particelle nell'intorno di ogni punto.

Tutte le quantità termodinamiche rilevanti potranno dunque essere calcolate direttamente da Ψ; in particolare, l'ordine della transizione di fase è fissato dalla definizione di tale funzionale: nel caso in esame si tratta di una transizione di fase del primo ordine.

Il funzionale di energia, detto funzionale di Ginzburg-Landau, avrà la seguente forma (si confronti ad esempio [4], [8], [9] e [24])

$$\Psi(\vartheta, \chi) = \mathscr{F}(\vartheta, \chi) + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla\chi|^2 . \tag{2.12}$$

Il funzionale $\mathscr{F}$ rappresenta la densità di energia libera delle fasi pure, in cui compaiono i termini legati all'entropia e le restrizioni sul parametro di fase, che indicheremo come $\beta + \sigma$, come si vedrà poco oltre. L'ultimo addendo, invece, tiene conto delle interazioni locali tra le fasi.

Si ricordi che l'energia interna, funzione dell'entropia, e l'energia libera sono legate dalla seguente relazione

$$e = \Psi + \vartheta\eta; \tag{2.13}$$

derivando tale relazione rispetto alla temperatura ϑ, si ottiene la relazione di Helmholtz

$$\eta = -\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}. \tag{2.14}$$

Si assuma che l'entropia abbia la seguente espressione

$$\eta = c_s\,(1 + \log\vartheta) + \ell\chi, \tag{2.15}$$

dove $c_s \in \mathbf{R}_+$ è la capacità termica del sistema e $\ell \in \mathbf{R}_+$ è il calore latente associato alla transizione di fase.

In conclusione, tenendo conto delle relazioni (2.14) e (2.15), si ha

$$\Psi(\vartheta, \chi) = -c_s\vartheta\log\vartheta - \ell\vartheta\chi + [\beta + \sigma]\,(\chi) + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla\chi|^2 , \tag{2.16}$$

con $\beta : \mathbf{R} \to [0, +\infty]$ una funzione propria, convessa e semicontinua inferiormente e $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un'altra funzione opportunamente regolare, che rappresentano delle arbitrarie costrizioni che si vogliono imporre al parametro di fase χ.

Si noti che ogni termine che compare nel funzionale Ψ ha un preciso significato fisico. In particolare, il secondo addendo rappresenta il termine di accoppiamento tra la temperatura e il parametro d'ordine χ; esso rappresenta la parte di energia libera che corrisponde al cambiamento temporale della temperatura nell'entropia.

Gli ultimi due termini, invece, sono in competizione tra loro: il primo termine dà un contributo trascurabile quando la variabile di fase è vicina alle fasi pure, mentre il gradiente di χ assume valori elevati vicino alle zone di transizione, per esempio in un intorno della superficie di interfaccia tra le due fasi.

La costante $\varepsilon > 0$ è il coefficiente di energia di interfaccia: una lunghezza di scala, che misura la forza di legame a livello microscopico; si può dimostrare che la sua radice quadrata è proporzionale allo spessore dell'interfaccia stessa (si veda [10], Sez. 3 e 4, e [15], Sez. 3).

Esempi di possibli nonlinearità. Il termine non lineare $\beta + \sigma$ può assumere diverse forme significative (si veda [12]).

Il principale modello di riferimento è il cosiddetto "modello a doppio pozzo": esso è costituito da un potenziale W del tipo

$$W = \beta + \sigma = \frac{1}{4}\left(\chi^2 - 1\right)^2, \tag{2.17}$$

che presenta due minimi simmetrici nei valori $\chi = +1$ e $\chi = -1$, a cui corrispondono le situazioni di fasi pure, mentre il valore di massimo $\chi = 0$ rappresenta il passaggio di fase.

In questo caso, β ha un'espressione polinomiale ed è una funzione regolare; nell'equazione di fase comparirà un termine non lineare del tipo

$$\beta'(\chi) + \sigma'(\chi) = \chi^3 - \chi. \tag{2.18}$$

Un'altra possibile scelta per l'espressione di $\beta + \sigma$ può essere la seguente.

Riprendendo in considerazione il caso in cui si vuole imporre $\chi \in [0, 1]$, con $\chi = 0, 1$ fasi pure, si è già detto che risulta ragionevole porre β uguale alla funzione indicatrice dell'intervallo $[0, 1]$ definita nel seguente modo

$$I_{[0,1]}(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi \in [0, 1] \\ +\infty & \text{altrove.} \end{cases} \tag{2.19}$$

In tal modo, il parametro di fase χ può assumere solo i valori nell'intervallo desiderato, inoltre, questa scelta implica che tutti i valori di $\chi \in [0, 1]$ siano possibili valori di equilibrio: si ammette, dunque, la presenza delle "mushy region". Il sottodifferenziale di β è l'inversa della funzione di Heaviside: un grafico massimale monotono multivoco definito nel seguente modo

$$\xi \in \partial I_{[0,1]}(\chi) \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} \xi \leq 0 & \text{se } \chi = 0 \\ \xi = 0 & \text{se } \chi \in (0, 1) \\ \xi \geq 0 & \text{se } \chi = 1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Per quanto riguarda l'espressione della funzione σ, una nonlinearità tipica delle transizioni di fase solido-liquide è data da

$$\sigma(\chi) = -\ell\vartheta_c + 4M\chi(1 - \chi), \tag{2.21}$$

ove ϑ_c è la temperatura critica di transizione di fase e M è il massimo valore della funzione σ, raggiunto per $\chi = 1/2$, che misura la profondità dei "pozzi" del potenziale corrispondenti alle diverse fasi (si veda [2], Sez. 2.4).

Combinando la prima legge della termodinamica (2.9) e la seconda legge della termodinamica (2.11), si ottiene la seguente disuguaglianza

$$\begin{aligned}
\Psi_t &= e_t - \vartheta_t \eta - \vartheta \eta_t \\
&\leq [-\mathrm{div}\mathbf{q} + r + \mathbf{H}\cdot\nabla\chi_t + B\chi_t] - \vartheta_t\eta - \vartheta\left[-\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\vartheta}\right) + \frac{r}{\vartheta}\right] \\
&= [-\mathrm{div}\mathbf{q} + r + \mathbf{H}\cdot\nabla\chi_t + B\chi_t] - \vartheta_t\eta - \vartheta\left[-\frac{1}{\vartheta}\mathrm{div}\mathbf{q} + \frac{1}{\vartheta^2}\mathbf{q}\cdot\nabla\vartheta + \frac{r}{\vartheta}\right] \\
&= -\vartheta_t\eta - \frac{1}{\vartheta}\mathbf{q}\cdot\nabla\vartheta + B\chi_t + \mathbf{H}\cdot\nabla\chi_t, \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

che deve essere identicamente soddisfatta per ogni processo ammissibile $\mathscr{P}$.

Si ricordi che un processo termodinamico $\mathscr{P}$ è una funzione a valori vettoriali definita sull'intervallo $[0,T)$ (con T il tempo di durata del processo)

$$\mathscr{P}(t) = (\vartheta_t(t), \chi_t(t), \nabla\chi_t(t), \nabla\vartheta(t)). \qquad (2.23)$$

Inoltre, per definire un sistema dinamico, l'insieme $\mathscr{E}$ delle variabili di stato e l'insieme Π dei processi ammissibili devono essere tali che esista una funzione

$$\pi : \mathscr{E} \times \Pi \to \mathscr{E}, \qquad (2.24)$$

che associ ad ogni coppia $(\sigma_i, \mathscr{P})$ lo stato finale σ_f ottenuto attraverso il processo $\mathscr{P}$ dallo stato iniziale σ_i.

Il prossimo obiettivo è ricercare un'espressione esplicita per le forze B e $\mathbf{H}$ compatibile con l'equazione (2.22) e, quindi, termomeccanicamente consistente.

Se si considerano i seguenti due processi $\mathscr{P} = (0, \chi_t, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ e $\mathscr{P} = (0, 0, \nabla\chi_t, \mathbf{0})$ e li si applica all'equazione (2.22), si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}\chi_t - B\chi_t &\leq 0 \qquad (2.25) \\
\left(\frac{\partial\Psi}{\partial(\nabla\chi)} - \mathbf{H}\right)\cdot\nabla\chi_t &\leq 0, \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

per ogni scelta di χ_t e $\nabla\chi_t$.

Sotto l'ipotesi di piccole perturbazioni, si può supporre che, al primo ordine di approssimazione attorno all'equilibrio, i funzionali B e $\mathbf{H}$ dipendano linearmente dalle variabili dissipative χ_t e $\nabla\chi_t$, ossia

$$\begin{aligned}
B &= B_{nd} + B_d\chi_t \qquad (2.27) \\
\mathbf{H} &= \mathbf{H}_{nd} + H_d\nabla\chi_t. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Combinando queste espressioni con le relazioni appena ricavate (2.25) e (2.26), è possibile derivare le seguenti leggi di stato

$$\begin{aligned} B_{nd} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} = -\ell\vartheta + \xi + \sigma'(\chi) \quad \text{ove } \xi \in \partial\beta(\chi) && (2.29)\\ B_d &\geq 0 && (2.30)\\ \mathbf{H}_{nd} &= \frac{\partial \Psi}{\partial(\nabla\chi)} = \varepsilon\nabla\chi && (2.31)\\ H_d &\geq 0. && (2.32) \end{aligned}$$

Si supponga, infine, che B_d e H_d siano costanti e, in particolare, che la parte dissipativa di $\mathbf{H}$ sia nulla

$$B_d = \mu, \quad H_d = 0. \tag{2.33}$$

Si consideri, adesso, il processo $\mathscr{P} = (0, 0, \mathbf{0}, \nabla\vartheta)$ e lo si applichi alla disuguaglianza (2.22): per ogni scelta di $\nabla\vartheta$,

$$\frac{\mathbf{q}}{\vartheta} \cdot \nabla\vartheta \leq 0. \tag{2.34}$$

È noto che la formula generale per un conduttore di calore è data da

$$\mathbf{q} = -k(\vartheta)\nabla\vartheta, \tag{2.35}$$

dove la conduttività di calore $k(\vartheta)$ è una funzione della temperatura. Per molti dielettrici, come il ghiaccio e l'acqua, si può supporre che $k(\vartheta)$ sia una funzione lineare. In tal caso, si ha

$$\mathbf{q} = -k_0\vartheta\nabla\vartheta, \quad \text{con } k_0 > 0. \tag{2.36}$$

Nel caso in esame, quindi, il flusso di calore non è descritto dalla usuale legge di Fourier

$$\mathbf{q} = -k_0\nabla\vartheta, \tag{2.37}$$

che avrebbe portato ad un termine logaritmico sotto l'operatore laplaciano nell'equazione dell'entropia (si veda ad esempio [4] e [5]), ma si suppone che $\mathbf{q}$ sia proporzionale al gradiente della temperatura attraverso un coefficiente termico non costante, che dipende dalla temperatura stessa.

Questa richiesta è in accordo con un postulato della termodinamica, secondo cui, quando la temperatura assoluta tende a zero, il coefficiente del flusso di calore degenera.

Riscrivendo la prima equazione della termodinamica (2.9), si ottiene

$$\begin{aligned} e_t &= -\mathrm{div}\mathbf{q} + r + (B_{nd} + B_d\chi_t)\chi_t + \mathbf{H}_{nd} \cdot \nabla\chi_t\\ &= -\vartheta\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\vartheta}\right) - \frac{1}{\vartheta}\mathbf{q} \cdot \nabla\vartheta + r + B_{nd}\chi_t + B_d\left|\chi_t\right|^2 + \mathbf{H}_{nd} \cdot \nabla\chi_t. \qquad (2.38) \end{aligned}$$

D'altra parte, grazie alle relazioni (2.13), (2.14), (2.29) e (2.31),

$$\begin{aligned} e_t &= \Psi_t + \vartheta_t \eta + \vartheta \eta_t \\ &= \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \vartheta_t + \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \chi_t + \frac{\partial \Psi}{\partial (\nabla \chi)} \nabla \chi_t \right] + \vartheta_t \eta + \vartheta \eta_t \\ &= B_{nd} \chi_t + \mathbf{H}_{nd} \cdot \nabla \chi_t + \vartheta \eta_t. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Quindi, per confronto,

$$\vartheta \eta_t = -\vartheta \mathrm{div}\,(-k_0 \nabla \vartheta) - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{q} \cdot \nabla \vartheta + r + \mu \left| \chi_t \right|^2. \tag{2.40}$$

Grazie all'ipotesi di piccole perturbazioni, si possono trascurare i termini non lineari di secondo ordine, che sono anche non negativi, e ridurre l'equazione alla seguente forma

$$\vartheta \eta_t - k_0 \vartheta \Delta \vartheta = r. \tag{2.41}$$

Dividendo per $\vartheta > 0$ ed esplicitando l'espressione di η_t, si ha

$$\partial_t (c_s \log \vartheta + \ell \chi) - k_0 \Delta \vartheta = w, \tag{2.42}$$

dove $w := r/\vartheta$.

Si può notare che, grazie alla presenza del logaritmo della temperatura (almeno sotto la derivata temporale), la positività della variabile ϑ segue direttamente dalla risoluzione del problema.

Infatti, dopo aver dimostrato che esiste una soluzione ϑ di questo problema, essa deve soddisfare l'equazione (2.42) e dunque $\vartheta > 0$, dal momento che il dominio del logaritmo è l'intervallo $(0, +\infty)$.

Infine, prendendo in considerazione il caso semplice in cui non vi è alcuna azione microscopica esterna ($b = 0$), la legge di bilanciamento per le microforze (2.6) diventa, grazie alle relazioni (2.29), (2.31), (2.33), un'equazione parabolica non lineare, spesso chiamata equazione di Allen-Cahn,

$$\varepsilon \Delta \chi = -\ell \vartheta + \xi + \sigma'(\chi) + \mu \chi_t, \tag{2.43}$$

con $\xi \in \partial \beta(\chi)$; ossia,

$$\mu \chi_t - \varepsilon \Delta \vartheta + \xi + \sigma'(\chi) = \ell \vartheta. \tag{2.44}$$

Seguendo la teoria di Ginzburg-Landau (si veda [8], Cap. 4) per i campi di fase, si può derivare l'equazione di fase nel seguente modo alternativo: si considera il funzionale di energia libera (2.16) e si impone che il parametro di fase χ si rilassi in un tempo $\mu > 0$ ad un punto critico di tale funzionale, ossia

$$\mu \partial_t \chi = \frac{\delta \Psi}{\delta \chi}[\chi]; \tag{2.45}$$

infatti, la derivata variazionale può essere interpretata come una forza dinamica generalizzata, che agisce su ogni punto $x \in \Omega$, e si assume che il parametro d'ordine risponda all'impatto di questa forza ad un tasso proporzionale al suo valore.

In conclusione, si impongono le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} &\log\vartheta(0) = \log\vartheta_0 \quad \text{q.o. in } \Omega \\ &\chi(0) = \chi_0 \qquad\qquad \text{q.o. in } \Omega \end{aligned} \tag{2.46}$$

e le condizioni al bordo. In particolare, si consideri una condizione di Robin non omogenea per la variabile ϑ

$$\nabla\vartheta \cdot \nu + \alpha\vartheta = h \quad \text{su } \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.47}$$

con ν il versore normale al bordo di Ω, che punta verso l'esterno, α un'opportuna funzione definita su $\partial\Omega$ a valori reali e h una funzione che rappresenta il termine di sorgente di superficie.

Per la variabile χ, invece, risulta necessario imporre una condizione di Neumann omogenea, poiché abbiamo escluso l'esistenza di forze esterne al corpo

$$\mathbf{H} \cdot \nu = \varepsilon\partial_\nu\chi = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.48}$$

dove ∂_ν indica la derivata normale esterna a Ω.

Il problema (P_μ) risulta, dunque, essere

$$\begin{aligned} &\partial_t(\log\vartheta + \chi) - \Delta\vartheta = w && \text{in } Q \\ &\mu\partial_t\chi - \Delta\chi + \xi + \sigma'(\chi) = \vartheta && \text{in } Q \\ &\xi \in \partial\beta(\chi) && \text{in } Q \\ &\nabla\vartheta \cdot \nu + \alpha\vartheta = h && \text{su } \partial\Omega \times (0,T) \\ &\partial_\nu\chi = 0 && \text{su } \partial\Omega \times (0,T) \\ &\log\vartheta(0) = \log\vartheta_0 && \text{in } \Omega \\ &\chi(0) = \chi_0 && \text{in } \Omega \end{aligned} \tag{2.49}$$

a meno di un riscalamento delle variabili, grazie al quale si è posto $c_s = \ell = k_0 = \varepsilon = 1$.

Capitolo 3

Risultati principali

Lo scopo del seguente capitolo è la formulazione variazionale analiticamente rigorosa del problema (P_μ) descritto nel capitolo precedente. Verranno, inoltre, introdotte le necessarie ipotesi sui dati iniziali e sui termini di sorgente per poter garantire la buona positura del problema.

Infine, verranno enunciati i teoremi di buona positura e del comportamento asintotico del problema.

3.1 Ipotesi per la buona positura

Si consideri un dominio Ω di $\mathbf{R}^3$, aperto, limitato, con bordo $\partial\Omega =: \Gamma$ sufficientemente regolare. Chiamato T il tempo finale, si ponga

$$Q := \Omega \times (0, T) \quad \text{e} \quad \Sigma := \Gamma \times (0, T). \tag{3.1}$$

Si definisca, quindi, la seguente terna Hilbertiana (si veda [7], Cap. V)

$$(V, H, V') = (H^1(\Omega), L^2(\Omega), (H^1(\Omega))') \tag{3.2}$$

con gli usuali prodotti scalari e le rispettive norme.

Si consideri il seguente operatore lineare continuo

$$B : V \to V'$$
$$\langle Bu, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma \alpha\, u\, v ds \quad \forall u, v \in V, \tag{3.3}$$

con

$$\begin{aligned} &\alpha \in L^\infty(\Gamma), \\ &0 < \overline{\alpha} \le \alpha(x) \le \widehat{\alpha} \quad \text{per q.o. } x \in \Gamma, \text{ per qualche } \overline{\alpha}, \widehat{\alpha} \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Per costruzione, l'operatore B è simmetrico e coercivo; inoltre, B definisce un prodotto scalare nello spazio V equivalente al prodotto scalare standard, grazie alla Disuguaglianza di Poincaré generalizzata (cfr. Appendice, Teorema 32).

Da qui in avanti, ogni volta che comparirà la norma dello spazio V, si intenderà la norma definita mediante l'operatore B.

Risulta, quindi, ben definito il seguente spazio funzionale

$$D(B;H) := B^{-1}(H) = \{u \in V \,|\Delta u \in H,\ \partial_\nu u + \alpha u = h \text{ q.o. in } \Sigma\} \subseteq V, \tag{3.5}$$

con immersione densa in V.

Analogamente, si consideri il seguente operatore lineare, continuo e simmetrico

$$A : V \to V'$$
$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \forall u, v \in V; \tag{3.6}$$

anche in questo caso, risulta ben definito lo spazio

$$D(A;H) := A^{-1}(H) = \{u \in V \,|\Delta u \in H,\ \partial_\nu u = 0 \text{ q.o. in } \Sigma\} \subseteq V, \tag{3.7}$$

con immersione densa in V.

Le ipotesi da imporre sui termini di sorgente sono le seguenti

$$g \in C^0([0,T];H) \tag{3.8}$$
$$h \in L^2(0,T;L^2(\Gamma)) \cap W^{1,1}(0,T;L^2(\Gamma))$$
$$h \geq 0 \quad \text{q.o. in } \Sigma. \tag{3.9}$$

Inoltre, definiamo un operatore $w \in C^0([0,T];V')$ nel seguente modo

$$\langle w(t), v\rangle = \int_\Omega g(t)\, v dx + \int_\Gamma h(t)\, v ds \quad \forall t \in (0,T),\ \forall v \in V. \tag{3.10}$$

Le restrizioni sul parametro di fase sono descritte dalle seguenti funzioni

$$\beta : \mathbf{R} \to [0,+\infty] \text{ convessa, propria, semicontinua inferiormente e } \beta(0) = 0 \tag{3.11}$$
$$\sigma \in C^1(\mathbf{R}) \text{ tale che } \sigma' \text{ sia lipschitziana, con costante di lipschitzianità } c_L. \tag{3.12}$$

Si consideri, quindi, il sottodifferenziale $\partial\beta$ della funzione β e si noti che $\partial\beta$ è un grafico massimale monotono, con $\partial\beta(0) \ni 0$ (si confronti [6], Cap. II).

Osservazione 1. *Un esempio di funzione β che soddisfi le ipotesi imposte può essere la funzione indicatrice di un intervallo chiuso e limitato: ad esempio, $\beta = I_{[0,1]}$.*

Osservazione 2. *Grazie alle ipotesi (3.12), si può facilmente dedurre una crescita di tipo polinomiale per la funzione σ*

$$|\sigma(r)| \leq c_\sigma(1 + r^2) \quad \forall r \in \boldsymbol{R}, \tag{3.13}$$

con $c_\sigma \in \boldsymbol{R}_+$ un'opportuna costante che dipende dalla costante di lipschitzianità c_L e dal valore di σ in zero.

Dimostrazione. Per ogni $r \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} |\sigma(r)| &= \left| \int_0^r \sigma'(s) ds + \sigma(0) \right| \leq \int_0^r \left|\sigma'(s)\right| ds + |\sigma(0)| \\ &\leq \int_0^r c_L \,|s|\, ds + |\sigma(0)| = \frac{c_L}{2} r^2 + |\sigma(0)| \,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

□

Si impongano, infine, le condizioni sui dati iniziali

$$\chi_0 \in V, \quad \beta(\chi_0) \in L^1(\Omega) \tag{3.15}$$

$$\vartheta_0 \in L^\infty(\Omega), \quad \vartheta_0 > 0 \text{ q.o. in } \Omega \text{ e } 1/\vartheta_0 \in L^\infty(\Omega). \tag{3.16}$$

Osservazione 3. *Si può notare che la condizione (3.16) implica l'esistenza di due costanti ϑ_* e ϑ^* positive tali che*

$$0 < \vartheta_* \leq \vartheta_0(x) \leq \vartheta^* \quad \textit{per q.o. } x \in \Omega. \tag{3.17}$$

In conclusione, il problema (P_μ) (cfr. (2.49))riscritto nella formulazione variazionale assume la seguente forma

$$\partial_t \left(\log \vartheta + \chi\right) + B\vartheta = w \quad \text{in } V' \text{ e q.o. in } (0,T) \tag{3.18}$$

$$\mu\partial_t\chi + A\chi + \xi + \sigma'(\chi) = \vartheta \quad \text{q.o. in } Q \tag{3.19}$$

$$\xi \in \partial\beta(\chi) \quad \text{q.o. in } Q \tag{3.20}$$

$$\log\vartheta(0) = \log\vartheta_0 \quad \text{q.o. in } \Omega \tag{3.21}$$

$$\chi(0) = \chi_0 \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{3.22}$$

3.2 Ipotesi per il comportamento al limite per $\mu \searrow 0$

A partire dal problema (P_μ), si ricava formalmente il problema (P_0), costituito dalla prima equazione (3.18) integrata in tempo e dalla seconda equazione (3.19), in cui non compare più il termine di derivata temporale della variabile di fase χ.

La necessità di presentare il problema (P_0) in questo modo segue dal fatto che l'equazione di fase diventa un'equazione stazionaria e, quindi, imporre un dato iniziale per la variabile χ perde significato. Tuttavia, le informazioni sui dati iniziali vengono recuperate nella prima equazione dopo essere stata integrata in tempo.

Inoltre, per quanto riguarda l'analisi asintotica per $\mu \searrow 0$, la difficoltà principale risiede nella mancanza di stime per $\partial_t\chi$ e di conseguenza per $\log\vartheta$ che sarà solo a valori in V'. Per questo motivo, dobbiamo dare una versione *ad hoc* del problema limite (P_0) in cui il termine $\log\vartheta$ sia sostituito da una funzione $\zeta \in L^2(0,T;V')$ che, tramite la sua relazione funzionale con ϑ, generalizzi l'uguaglianza $\zeta = \log\vartheta$.

Quindi, diamo una nozione generalizzata del logaritmo introdotta in [18], nel caso di condizioni al contorno di Dirichlet.

Sia $\psi : \mathbf{R} \to (-\infty, +\infty]$ tale che

$$\psi(\tau) = \tau(\log \tau - 1) \ \text{ se } \tau > 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(\tau) = +\infty \ \ \textit{se } \tau < 0; \tag{3.23}$$

si osservi che $\psi'(\tau) = \log \tau$, per ogni $\tau > 0$.

Definizione 4. Per $\vartheta \in L^2(0,T;V)$ si definisca $\mathrm{Log}\vartheta$ come l'insieme delle $\zeta \in L^2(0,T;V')$ tali che

$$\langle \zeta, \theta - \vartheta \rangle + \int_Q \psi(\vartheta) \leq \int_Q \psi(\theta) \quad \forall \theta \in L^2(0,T;V') \tag{3.24}$$

e

$$D(\mathrm{Log}) = \left\{ \vartheta \in L^2(0,T;V) \ \mid \mathrm{Log}\vartheta \neq \emptyset \right\}. \tag{3.25}$$

Si veda [18], Osservazioni 4.2 e 4.3, in cui si studiano ulteriori proprietà di questo operatore.

A questo punto, si definisca $\Psi : L^2(0,T;V) \to (-\infty, +\infty]$ tale che

$$\Psi(v) = \int_Q \psi(v) \quad \forall v \in L^2(0,T;V). \tag{3.26}$$

Ψ è convessa, propria e $v \in D(\Psi)$ se e solo se v è non negativa.

Inoltre, $\partial\Psi : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V')$ è ben definito e vale $\mathrm{Log}v = \partial\Psi(v)$ (cfr. [18], Sez. 4).

Il problema (P_0) ha, dunque, la seguente forma

$$\zeta(t) + \chi(t) + 1 * B\vartheta(t) = 1 * w(t) + \eta_0 \quad \text{in } V', \ \text{q.o. in } (0,T) \tag{3.27}$$

$$\zeta \in \mathrm{Log}\vartheta \tag{3.28}$$

$$A\chi + \xi + \sigma'(\chi) = \vartheta \quad \text{q.o. in } Q \tag{3.29}$$

$$\xi \in \partial\beta(\chi) \quad \text{q.o. in } Q, \tag{3.30}$$

con $\eta_0 := \log \vartheta_0 + \chi_0$. In questo caso, il simbolo $*$ denota l'usuale prodotto di convoluzione in tempo sull'intervallo $(0,T)$, definito nel seguente modo

$$(a * b)(t) = \int_0^t a(s)b(t-s)ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.31}$$

Gli operatori A, B, w sono gli stessi definiti nella sezione precedente. In vista dell'analisi asintotica, si richiede che il dato w abbia una maggiore regolarità rispetto alla variabile temporale, ossia

$$g \in H^1(0,T;H) \tag{3.32}$$

$$h \in H^1(0,T;L^2(\Gamma)), \ h \geq 0 \quad \text{q.o. in } \Sigma; \tag{3.33}$$

segue, quindi, $w \in H^1(0,T;V')$.

Le ipotesi da imporre sui dati iniziali sono analoghe a quelle imposte nel problema (P_μ), con $\mu > 0$,

$$\chi_0 \in V, \ \beta(\chi_0) \in L^1(\Omega) \tag{3.34}$$

$$\vartheta_0 \in L^\infty(\Omega), \ \vartheta_0 > 0 \text{ q.o. in } \Omega \ \text{ e } 1/\vartheta_0 \in L^\infty(\Omega). \tag{3.35}$$

Si supponga, inoltre, che la successione di dati iniziali $\{\chi_{0,\mu}\}$ del problema (P_μ) verifichi le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} &\chi_{0,\mu} \xrightarrow{\mu\to 0} \chi_0 \quad \text{in } V \\ &\|\chi_{0,\mu}\|_V + \|\beta(\chi_{0,\mu})\|_{L^1(\Omega)} \le c \quad \forall \mu \in (0,1). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Per quanto riguarda le funzioni β e σ, esse possiedono le stesse proprietà enunciate per il problema di buona positura di (P_μ) (si veda (3.11) e (3.12)), ma si richiede che verifichino anche alcune ipotesi aggiuntive necessarie per dimostrare la convergenza del problema (P_μ) a (P_0).

In particolare, si possono considerare due ipotesi distinte, a seconda di voler imporre delle costrizioni maggiori sulla funzione β oppure sulla funzione σ.

Ipotesi 1. Si supponga che σ sia una funzione lineare, del tipo

$$\sigma(r) = ar + b \quad \text{per ogni } r \in \mathbf{R}, \tag{3.37}$$

con $a, b \in \mathbf{R}$ opportune costanti. Inoltre, si imponga la seguente limitazione

$$\beta(r) \ge c_1 r^2 - c_2 \quad \text{per ogni } r \in D(\beta), \tag{3.38}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}_+$.

Ipotesi 2. Si supponga che sia soddisfatta la seguente proprietà

$$\Big[(\xi_1 + \sigma'(\chi_1)) - (\xi_2 + \sigma'(\chi_2))\Big] (\chi_1 - \chi_2) \ge \rho\, (\chi_1 - \chi_2)^2 , \tag{3.39}$$

$\forall \chi_i \in D(\partial\beta)$, $\forall \xi_i \in \partial\beta(\chi_i)$, $i = 1, 2$, per qualche costante positiva ρ.

Inoltre, si supponga che

$$\beta(r) + \sigma(r) \ge c_1 r^2 - c_2 \quad \text{per ogni } r \in D(\beta), \tag{3.40}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}_+$.

Osservazione 5. *Si osservi che (3.39) è soddisfatta se, ad esempio, $\partial\beta$ è fortemente monotono e σ' ha una crescita dominata da quella di $\partial\beta$.*

3.3 Risultati principali

A questo punto si può enunciare il primo risultato di buona positura per il problema (P_μ), con $\mu > 0$.

Teorema 1 (Buona positura). *Siano $\mu > 0$ e $T > 0$ fissati. Si supponga che valgano le ipotesi (3.4), (3.8), (3.9), (3.11), (3.12), (3.15), (3.16).*

Allora, esiste un'unica coppia (ϑ, χ) ed esiste una selezione ξ tale che

$$\vartheta \in L^2(0,T;V) \tag{3.41}$$

$$\vartheta > 0 \quad q.o. \ in \ Q \tag{3.42}$$

$$\log\vartheta \in L^\infty(0,T;H) \cap H^1(0,T;V') \tag{3.43}$$

$$\chi \in L^2(0,T;D(A;H)) \cap H^1(0,T;H) \tag{3.44}$$

$$\xi \in L^2(Q) \tag{3.45}$$

e che soddisfi il problema (P_μ)

$$\partial_t(\log\vartheta + \chi) + B\vartheta = w \quad in \ V' \ e \ q.o. \ in \ (0,T) \tag{3.46}$$

$$\mu\partial_t\chi + A\chi + \xi + \sigma'(\chi) = \vartheta \quad q.o. \ in \ Q \tag{3.47}$$

$$\xi \in \partial\beta(\chi) \quad q.o. \ in \ Q \tag{3.48}$$

$$\log\vartheta(0) = \log\vartheta_0 \quad q.o. \ in \ \Omega \tag{3.49}$$

$$\chi(0) = \chi_{0,\mu} \quad q.o. \ in \ \Omega. \tag{3.50}$$

Se tutte le norme dei dati enunciati nelle ipotesi sono limitate da una costante positiva M

$$\|g\|_{C^0([0,T];H)} + \|h\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))\cap W^{1,1}(0,T;L^2(\Gamma))} + \|\chi_0\|_V + \|\vartheta_0\|_{L^\infty(\Omega)} \le M, \tag{3.51}$$

allora la soluzione (ϑ, χ, ξ) soddisfa la seguente stima

$$\|\vartheta\|_{L^2(0,T;V)} + \|\log\vartheta\|_{L^\infty(0,T;H)\cap H^1(0,T;V')} + \|\chi\|_{L^2(0,T;D(A;H))\cap H^1(0,T;H)} + \|\xi\|_{L^2(0,T;H)} \le M' \tag{3.52}$$

dove $M' = M'(\Omega, T, M)$.

Inoltre, le componenti (ϑ, χ) della soluzione dipende con continuità dai dati, ossia, se $(g_i, h_i, \vartheta_{0i}, \chi_{0i})$, $i = 1, 2$, sono due insiemi di dati, le cui norme sono limitate rispettivamente dalle costanti M_1 e M_2; allora le corrispettive soluzioni (ϑ_i, χ_i) soddisfano la seguente stima

$$\begin{aligned}&\int_{Q_t}(\log\vartheta_1 - \log\vartheta_2)(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \int_{Q_t}(\xi_1 - \xi_2)(\chi_1 - \chi_2)\\ &+ \int_Q |\nabla(\chi_1 - \chi_2)|^2 + \mu\int_\Omega |\chi_1(t) - \chi_2(t)|^2 + \|1 * (\vartheta_1 - \vartheta_2)(t)\|_V^2\\ &\le M''\left[\|\eta_{0,1} - \eta_{0,2}\|_H^2 + \|g_1 - g_2\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|h_1 - h_2\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}\right]\end{aligned} \tag{3.53}$$

$\forall t \in (0,T)$; dove $\eta_{0i} = \log\vartheta_{0i} + \chi_{0i}$, per $i = 1, 2$, e $M'' = M''(\Omega, T, M_1, M_2) \in \boldsymbol{R}_+$.

Osservazione 6. *Si noti che l'appartenenza di* $\log\vartheta$ *e* χ *agli spazi funzionali indicati nel Teorema 1 garantisce la continuità temporale di tali funzioni*

$$\log\vartheta \in C^0([0,T];V') \tag{3.54}$$

$$\chi \in C^0([0,T];V); \tag{3.55}$$

le condizioni iniziali risultano, quindi, pienamente soddisfatte.

Il secondo teorema riguarda l'analisi asintotica per $\mu \searrow 0$ del problema (P_μ).

Teorema 2 (Comportamento al limite per $\mu \searrow 0$). *Sia* $\mu \in (0,1)$. *Sotto le stesse ipotesi del Teorema 1, si supponga inoltre che valgano (3.32), (3.33), (3.34), (3.35), (3.36).*

Si assuma indifferentemente l'Ipotesi 1 oppure l'Ipotesi 2 imposte sulle funzioni β *e* σ.

Allora, la soluzione del problema (P_μ), *fornita dal Teorema 1, converge, al tendere a zero del coefficiente* μ, *rispetto alla topologia naturale, ad una soluzione del problema* (P_0)

$$\zeta(t) + \chi(t) + 1 * B\vartheta(t) = 1 * w(t) + \log\vartheta_0 + \chi_0 \quad \textit{in } V', \ \textit{q.o. in } (0,T) \tag{3.56}$$

$$\zeta \in \mathrm{Log}\vartheta \tag{3.57}$$

$$A\chi + \xi + \sigma'(\chi) = \vartheta \quad \textit{q.o. in } Q \tag{3.58}$$

$$\xi \in \partial\beta(\chi) \quad \textit{q.o. in } Q, \tag{3.59}$$

con le seguenti regolarità

$$\vartheta \in L^2(0,T;V) \tag{3.60}$$

$$\zeta \in L^\infty(0,T;V') \tag{3.61}$$

$$\chi \in L^2(0,T;D(A;H)) \tag{3.62}$$

$$\xi \in L^2(0,T;H). \tag{3.63}$$

Inoltre, le componenti (ϑ,χ) *della soluzione dipendono in modo continuo dai dati e sono, quindi, uniche soluzioni di* (P_0). *Ossia, se* $(g_i, h_i, \vartheta_{0i}, \chi_{0i})$, $i = 1,2$, *sono due insiemi di dati, le cui norme (negli opportuni spazi funzionali) sono limitate dalle costanti* M_1 *e* M_2, *allora le corrispettive soluzioni* (ϑ_i,χ_i) *soddisfano le seguenti stime; sotto l'Ipotesi 1, si ha*

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_t} (\zeta_1 - \zeta_2)(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \int_{Q_t} (\xi_1 - \xi_2)(\chi_1 - \chi_2) \\
&\quad + \int_Q |\nabla(\chi_1 - \chi_2)|^2 + \|1 * (\vartheta_1 - \vartheta_2)(t)\|_V^2 \\
&\leq \tilde{M} \left[\|\eta_{0,1} - \eta_{0,2}\|_H^2 + \|g_1 - g_2\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|h_1 - h_2\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \right]
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$\forall t \in (0,T)$; dove $\eta_{0i} = \log \vartheta_{0i} + \chi_{0i}$, per $i = 1,2$, e $\tilde{M} = \tilde{M}(\Omega, T, M_1, M_2) \in \boldsymbol{R}_+$; mentre, sotto l'Ipotesi 2, si ha

$$\int_{Q_t} (\zeta_1 - \zeta_2)(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \|\chi_1 - \chi_2\|_{L^2(0,T;V)} + \|1 * (\vartheta_1 - \vartheta_2)(t)\|_V^2$$
$$\leq \overline{M} \left[\|\eta_{0,1} - \eta_{0,2}\|_H^2 + \|g_1 - g_2\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|h_1 - h_2\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \right], \tag{3.65}$$

$\forall t \in (0,T)$, con $\overline{M} = \overline{M}(\Omega, T, M_1, M_2) \in \boldsymbol{R}_+$.

Capitolo 4

Esistenza ed unicità della soluzione di (P_μ)

La dimostrazione del Teorema 1 sull'esistenza di una soluzione del problema (P_μ) non è immediata e richiede il passaggio ad un problema simile a quello originale, ma più semplice da trattare. A tal fine, si introduce una famiglia di problemi approssimanti, dipendenti da un parametro positivo ε, in cui vengono regolarizzati i termini non lineari e i dati iniziali.

Successivamente, si manda il parametro ε a zero e si verifica la convergenza del problema (P_ε) al problema originale; il risultato ottenuto garantisce l'esistenza di una soluzione di tale problema come limite della successione delle soluzioni dei problemi approssimanti.

Il presente capitolo fa uso dei risultati illustrati nell'articolo [3], Sez. 4.

4.1 Regolarizzazione

4.1.1 Ipotesi e risultati preliminari

Per poter regolarizzare il problema si introducano, al posto dei termini non lineari, delle funzioni approssimanti più regolari, che godono di opportune proprietà che saranno utilizzate in seguito.

Il grafico massimale monotono $\partial\beta$ viene sostituito dalla sua approssimante di Yosida (si veda [6]. Cap. II.4)

$$\beta'_\varepsilon(r) := \frac{I - \tau_\varepsilon}{\varepsilon}(r), \quad \forall r \in \mathbf{R} \tag{4.1}$$

dove $\tau_\varepsilon = (I + \varepsilon\partial\beta)^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è il risolvente di $\partial\beta$.

Definiamo, inoltre, una primitiva della funzione β'_ε:

$$\beta_\varepsilon : \mathbf{R} \to [0, +\infty) \tag{4.2}$$

$$\beta_\varepsilon(r) := \int_0^r \beta'_\varepsilon(s)ds. \tag{4.3}$$

Si ricordi che (si veda [6], Cap. II, Proposizione 2.6) per ogni $\varepsilon > 0$

$$\beta_\varepsilon(r) \leq \beta(r) \quad \forall r \in \mathbf{R}. \tag{4.4}$$

Anche per il termine logaritmico è necessario definire l'approssimante di Yosida

$$\log_\varepsilon(r) = \frac{I - \rho_\varepsilon}{\varepsilon}(r), \quad \forall r \in \mathbf{R} \tag{4.5}$$

dove, in questo caso, ρ_ε è il risolvente di log.

Osservazione 7. *Grazie alle proprietà dell'approssimante di Yosida, le funzioni β'_ε e $\log_\varepsilon$ sono degli operatori massimali monotoni e lipschitziani con costante di lipschitzianità pari a $1/\varepsilon$ (si confronti [6], Cap. II, Proposizione 2.6).*

Per completare la regolarizzazione del problema, si definiscono, infine, le seguenti funzioni

$$\mathrm{Log}_\varepsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \tag{4.6}$$
$$\mathrm{Log}_\varepsilon(r) := \varepsilon r + \log_\varepsilon(r) \tag{4.7}$$

e

$$I_\varepsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \tag{4.8}$$
$$I_\varepsilon(r) := \int_0^r s\mathrm{Log}'_\varepsilon(s)ds, \tag{4.9}$$

che è un'approssimazione dell'identità sull'intervallo $(0, +\infty)$.

Enunciamo a questo punto due lemmi che mettono in evidenza alcune importanti proprietà delle funzioni appena definite e riportiamo nuovamente le dimostrazioni per completezza e per comodità di lettura.

Lemma 8 ([3], Lemma 4.2)**.** *La funzione Log_ε appena definita è una funzione monotona, lipschitziana e derivabile, con derivata limitata*

$$\varepsilon \leq Log'_\varepsilon(r) \leq \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}, \quad \forall r \in \boldsymbol{R}. \tag{4.10}$$

Dimostrazione. Si ricordi che

$$\log_\varepsilon(r) = \frac{r - \rho_\varepsilon(r)}{\varepsilon} \quad \forall r \in \mathbf{R}, \tag{4.11}$$

ove ρ_ε è definito nel seguente modo

$$\rho_\varepsilon(r) \text{ è l'unico } \rho > 0 \text{ t.c. } \rho + \varepsilon \log \rho = r. \tag{4.12}$$

Derivando membro a membro la formula (4.12) rispetto alla variabile r, si ottiene

$$\rho_\varepsilon'(r) + \varepsilon \frac{\rho_\varepsilon'(r)}{\rho_\varepsilon(r)} = 1; \tag{4.13}$$

si ricava, quindi, una formula esplicita per ρ_ε'

$$\rho_\varepsilon'(r) = \frac{\rho_\varepsilon(r)}{\rho_\varepsilon(r) + \varepsilon} \tag{4.14}$$

e la si sostituisce nell'espressione per la derivata prima di $\log_\varepsilon$. Si ottiene la seguente relazione

$$\mathrm{Log}_\varepsilon'(r) = \varepsilon + \log_\varepsilon'(r) = \varepsilon + \frac{1}{\rho_\varepsilon(r) + \varepsilon}. \tag{4.15}$$

Sfruttando il fatto che $\rho_\varepsilon > 0$, si ottengono le stime volute. $\square$

Lemma 9 ([3], Lemma 4.2 e 4.3)**.** *Per ogni $r \in \boldsymbol{R}$ vale la disuguaglianza*

$$I_\varepsilon(r) \leq \frac{\varepsilon}{2} r^2 + 2r, \tag{4.16}$$

purché ε sia sufficientemente piccolo.

Dimostrazione. Per costruzione, $I_\varepsilon(0) = 0$ e $I_\varepsilon'(r) = \varepsilon r + r \log_\varepsilon'(r)$. Inoltre, $\log_\varepsilon'(r) \leq 2/r$ per ogni $r > 0$ ed ε sufficientemente piccolo: infatti, come è già stato visto nel Lemma 8,

$$\log_\varepsilon'(r) = \frac{1}{\rho_\varepsilon(r) + \varepsilon}; \tag{4.17}$$

sia $\varepsilon_* > 0$ tale che $\varepsilon_* \log \rho \leq \rho$, per ogni $\rho > 0$, e si consideri $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$: allora, si ha $r = \rho + \varepsilon \log \rho \leq 2\rho$, ossia

$$\rho_\varepsilon(r) \geq \frac{r}{2}. \tag{4.18}$$

Sostituendo nell'espressione di $\log_\varepsilon'(r)$, si ottiene la disuguaglianza voluta. In conclusione,

$$I_\varepsilon'(r) \leq \varepsilon r + 2 \quad \forall r > 0. \tag{4.19}$$

Segue la tesi. $\square$

Per quanto riguarda i dati iniziali, il termine χ_0 non viene regolarizzato, mentre è necessario regolarizzare il dato iniziale della temperatura. Si introduca, quindi, una successione di dati iniziali regolarizzati $\{\vartheta_{0,\varepsilon}\}$ che soddisfino le seguenti condizioni

$$\vartheta_{0\varepsilon} \in V \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{4.20}$$

$$0 < \vartheta_* \leq \vartheta_{0\varepsilon} \leq \vartheta^* \quad \text{q.o. in } \Omega,\ \forall \varepsilon > 0 \tag{4.21}$$

$$\vartheta_{0\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \vartheta_0 \quad \text{in } H \text{ e q.o. } \Omega. \tag{4.22}$$

In conclusione, il problema approssimato (P_ε) è il seguente

$$\partial_t \left(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon + \chi_\varepsilon\right) + B\vartheta_\varepsilon = w \quad \text{in } V', \text{ q.o. in } (0,T) \tag{4.23}$$

$$\mu\partial_t\chi_\varepsilon + A\chi_\varepsilon + \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) + \sigma'(\chi_\varepsilon) = \vartheta_\varepsilon \quad \text{q.o. in } Q \tag{4.24}$$

$$\vartheta_\varepsilon(0) = \vartheta_{0,\varepsilon} \quad \text{q.o. in } \Omega \tag{4.25}$$

$$\chi_\varepsilon(0) = \chi_0 \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{4.26}$$

4.1.2 Teorema di esistenza per (P_ε)

A questo punto, si può enunciare il Teorema di buona positura relativo al problema (P_ε), con $\varepsilon > 0$ fissato.

Teorema 3 (Esistenza ed unicità della soluzione del problema (P_ε)). *Sia $\varepsilon > 0$. Sotto le ipotesi precedentemente enunciate per il Teorema 1 di esistenza della soluzione del problema (P_μ) e con le ulteriori ipotesi (4.20) e (4.21), esiste un'unica coppia $(\vartheta_\varepsilon, \chi_\varepsilon)$ tale che soddisfi le seguenti condizioni di regolarità*

$$\vartheta_\varepsilon \in L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;H) \tag{4.27}$$

$$\chi_\varepsilon \in L^2(0,T;D(A;H)) \cap H^1(0,T;H) \tag{4.28}$$

e risolva il problema approssimato (P_ε) (4.23)–(4.26).

4.2 Dimostrazione del Teorema di esistenza per (P_ε)

Per dimostrare l'esistenza di una soluzione del problema approssimato (P_ε), con $\varepsilon > 0$ fissato, si ricorre alla usuale procedura di discretizzazione in spazio con il metodo di Faedo-Galerkin.

Si introducano in V due successioni $\{V_n\}$ e $\{W_n\}$ di sottospazi finito-dimensionali inscatolati ($V_n \subseteq V_{n+1}$ e $W_n \subseteq W_{n+1}$ per ogni n), la cui unione sia densa in V

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n} = V \quad \text{e} \quad \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} W_n} = V; \tag{4.29}$$

in particolare, è possibile scegliere tali sottospazi in modo tale che $\forall\, n$

$$V_n \subseteq D(B;H) \quad \text{e} \quad W_n \subseteq D(A;H). \tag{4.30}$$

Inoltre, si approssimano i dati iniziali mediante delle opportune succesioni di dati più regolari

$$\vartheta_{0,n} \in V_n \quad \forall n, \qquad \vartheta_{0,n} \xrightarrow{n\to+\infty} \vartheta_{0\varepsilon} \quad \text{in } V \tag{4.31}$$

$$\chi_{0,n} \in W_n \quad \forall n, \qquad \chi_{0,n} \xrightarrow{n\to+\infty} \chi_0 \quad \text{in } V. \tag{4.32}$$

Osservazione 10. *Dal momento che le successioni $\{\vartheta_{0,n}\}$ e $\{\chi_{0,n}\}$ sono successioni convergenti in V, esse sono uniformemente limitate da una costante positiva, indipendente da n*

$$\|\vartheta_{0,n}\|_V + \|\chi_{0,n}\|_V \le c \quad \forall n \in \boldsymbol{N}. \tag{4.33}$$

Il problema discretizzato (P_n) che andremo a studiare è il seguente

$$(\partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_n(t) + \chi_n(t)), v)_H + (B\vartheta_n(t), v)_H = (w(t), v)_H$$
$$\text{per q.o. } t \in (0,T), \ \forall v \in V_n \tag{4.34}$$
$$\mu(\partial_t \chi_n(t), u)_H + (\nabla \chi_n(t), \nabla u)_H + (\beta'_\varepsilon(\chi_n(t)) + \sigma'(\chi_n(t)), u)_H = (\vartheta_n(t), u)_H$$
$$\text{per q.o. } t \in (0,T), \ \forall u \in W_n \tag{4.35}$$
$$\vartheta_n(0) = \vartheta_{0,n} \quad \text{q.o. in } \Omega \tag{4.36}$$
$$\chi_n(0) = \chi_{0,n} \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{4.37}$$

Teorema 4 (Esistenza ed unicità della soluzione del problema (P_n)). *Sia $n \in \boldsymbol{N}$. Sotto le ipotesi del Teorema 3 e supponendo*

$$\vartheta_{0,n} \in V_n \quad e \quad \chi_{0,n} \in W_n, \tag{4.38}$$

il problema discreto (P_n) (4.34)–(4.37) ammette un'unica coppia di soluzioni (ϑ_n, χ_n) che soddisfi

$$\vartheta_n \in C^1([0,T]; V_n) \quad e \quad \chi_n \in C^1([0,T]; W_n). \tag{4.39}$$

4.2.1 Dimostrazione del Teorema di esistenza per (P_n)

Siano $\{e_j\}_{j=1}^n$ e $\{b_j\}_{j=1}^n$ due basi di V_n e W_n rispettivamente. Si possono esprimere le funzioni incognite ϑ_n e χ_n, rispetto alle basi scelte, nel seguente modo

$$\vartheta_n(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) e_i \tag{4.40}$$
$$\chi_n(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) b_i; \tag{4.41}$$

le vere incognite, quindi, sono i vettori $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ dei coefficienti che determinano le funzioni.

Si testi la prima equazione (4.34) per un generico elemento della base e_j e la seconda equazione (4.35) per un elemento della base b_j

$$\int_\Omega \partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_n) e_j + \int_\Omega \partial_t(\chi_n) e_j + \int_\Omega \nabla \vartheta_n \cdot \nabla e_j + \int_\Gamma \alpha \vartheta_n e_j = \int_\Omega w e_j \tag{4.42}$$
$$\mu \int_\Omega \partial_t(\chi_n) b_j + \int_\Omega \nabla \chi_n \cdot \nabla b_j + \int_\Omega \beta'_\varepsilon(\chi_n) b_j + \int_\Omega \sigma'(\chi_n) b_j = \int_\Omega \vartheta_n b_j \tag{4.43}$$

ossia,

$$\int_\Omega \mathrm{Log}'_\varepsilon\left(\sum_i u_i e_i\right)\left(\sum_i u'_i e_i\right) e_j + \int_\Omega \left(\sum_i y'_i b_i\right) e_j + \sum_i u_i \int_\Omega \nabla e_i \cdot \nabla e_j$$
$$+ \int_\Gamma \alpha \left(\sum_i u_i e_i\right) e_j - \int_\Omega w e_j = 0 \tag{4.44}$$

$$\mu \int_\Omega \left(\sum_i y'_i b_i\right) b_j + \int_\Omega \left(\sum_i y_i \nabla b_i\right) \cdot \nabla b_j + \int_\Omega \beta'_\varepsilon \left(\sum_i y_i b_i\right) b_j$$
$$+ \int_\Omega \sigma' \left(\sum_i y_i b_i\right) b_j - \int_\Omega \left(\sum_i u_i e_i\right) b_j = 0. \tag{4.45}$$

Si ha, quindi, un sistema di equazioni integro-differenziali ordinarie nelle incognite $\mathbf{u}$ e $\mathbf{y}$

$$\mathbf{E}\left(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u'}(t), \mathbf{y'}(t)\right) = 0 \quad t \in (0, T), \tag{4.46}$$

con componenti $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ definite dalle espressioni (4.44) e (4.45) rispettivamente.

Osservazione 11. *Le variabili* $(\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{y'})$ *sono tra loro indipendenti, come le variabili* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$.

L'obiettivo dei prossimi ragionamenti è la risoluzione dell'equazione (4.46) rispetto alle variabili $(\mathbf{u'}, \mathbf{y'})$, in modo tale da ridurre il sistema in forma normale. In seguito, si applicherà il Teorema della Funzione Implicita per dimostrare l'esistenza di una soluzione.

Innanzitutto, si può osservare che $\mathbf{E}$ è una funzione continua e derivabile con continuità rispetto alle varibili u'_i e y'_i, grazie alla continuità degli integrali coinvolti.

Lo Jacobiano di $\mathbf{E}$ è una matrice a 4 blocchi

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial(\mathbf{u'}, \mathbf{y'})} = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u'}} & \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y'}} \\ \hline \dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u'}} & \dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y'}} \end{array}\right]; \tag{4.47}$$

inoltre, $\mathbf{G}$ non dipende esplicitamente da $\mathbf{u'}$, quindi si ha

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u'}} = 0. \tag{4.48}$$

Di conseguenza, il determinante dello Jacobiano di $\mathbf{E}$ è uguale a

$$\det\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial(\mathbf{u'}, \mathbf{y'})}\right] = \det\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u'}}\right] \cdot \det\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y'}}\right]. \tag{4.49}$$

Si noti che tutte le derivate parziali coinvolte sono dei prodotti scalari; infatti,

$$\frac{\partial G_j}{\partial y_i'} = \mu \int_\Omega b_i b_j = \mu (b_i, b_j)_H \tag{4.50}$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial u_i'} = \int_\Omega \mathrm{Log}_\varepsilon' \left(\sum_k u_k(t) e_k \right) e_i e_j =: (e_i, e_j)_{t,\mathbf{u}}; \tag{4.51}$$

grazie al Lemma 8, si ha

$$\varepsilon (e_i, e_j)_H \leq (e_i, e_j)_{t,\mathbf{u}} \leq \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) (e_i, e_j)_H \quad \forall t \in (0, T), \tag{4.52}$$

quindi, la forma bilineare $(\cdot, \cdot)_{t,\mathbf{u}}$ è un prodotto scalare in H equivalente al prodotto scalare standard.

In conclusione, poiché $\{e_j\}_{j=1}^n$ è una base di V_n e $\{b_j\}_{j=1}^n$ è una base di W_n, $\left[\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u'}}\right]$ e $\left[\dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{y'}}\right]$ sono matrici definite positive e

$$\det \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial (\mathbf{u'}, \mathbf{y'})} \right] \neq 0. \tag{4.53}$$

A questo punto, è necessario individuare un punto $(t_*, \mathbf{u}_*, \mathbf{y}_*, \mathbf{u'}_*, \mathbf{y'}_*)$ tale che

$$E(t_*, \mathbf{u}_*, \mathbf{y}_*, \mathbf{u'}_*, \mathbf{y'}_*) = 0. \tag{4.54}$$

Innanzitutto, si pone $t_* = 0$; poiché i dati iniziali sono $\vartheta_{0,n} \in V_n$ e $\chi_{0,n} \in W_n$, si pone $\mathbf{u}_*$ uguale ai coefficienti di $\vartheta_{0,n}$ e $\mathbf{y}_*$ uguale ai coefficienti di $\chi_{0,n}$ rispetto alle basi considerate.

Si definisca $\chi_{0,n}^\bullet$ nel modo seguente

$$\mu \chi_{0,n}^\bullet - \Delta \chi_{0,n} + \beta_\varepsilon'(\chi_{0,n}) + \sigma'(\chi_{0,n}) = \vartheta_{0,n}. \tag{4.55}$$

Per confronto, si ha $\chi_{0,n}^\bullet \in H$: infatti, $\chi_{0,n} \in W_n \subseteq D(A; H)$, quindi $\Delta \chi_{0,n} \in H$; $\vartheta_{0,n} \in V_n$, mentre $\beta_\varepsilon'(\chi_{0,n})$ e $\sigma'(\chi_{0,n})$ appartengono ad H, poiché β_ε' e σ' sono funzioni Lipschitiziane e $\chi_{0,n} \in W_n$.

Dopo aver proiettato $\chi_{0,n}^\bullet$ su W_n mediante il prodotto scalare standard di H, si ottiene $\chi_{0,n}^{\bullet *} \in W_n$; si ponga, quindi, $\mathbf{y'}_*$ uguale ai coefficienti di $\chi_{0,n}^{\bullet *}$ rispetto alla base $\{b_j\}$.

Per trovare il vettore $\mathbf{u'}_*$, si definisca innanzitutto la seguente funzione

$$w_n(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) e_i, \tag{4.56}$$

ove $w_i(t) = (w(t), e_i)_H$; per costruzione, $w_n \in C^0([0, T]; V_n)$ e la successione delle funzionni w_n così definite converge alla funzione w nell spazio $C^0([0, T]; V')$.

A questo punto, si definisca $u^{\bullet}_{0,n}$ come soluzione della seguente equazione

$$\mathrm{Log}'_{\varepsilon}(\vartheta_{0,n})u^{\bullet}_{0,n} + \chi^{\bullet *}_{0,n} + B\vartheta_{0,n} = w_n(0). \tag{4.57}$$

Per confronto, si ha $u^{\bullet}_{0,n} \in H$: infatti, $\chi^{\bullet *}_{0,n} \in V$, $B\vartheta_{0,n} \in H$, poiché $\vartheta_{0,n} \in D(B;H)$, $\mathrm{Log}'_{\varepsilon}(\vartheta_{0,n}) \geq \varepsilon$ e $w_n(0) \in V_n$ per costruzione. Si proietti, quindi, $u^{\bullet}_{0,n}$ su V_n rispetto al prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_{t_*,\mathbf{u}_*}$ e si ponga $\mathbf{u'}_*$ uguale ai coefficienti di $u^{\bullet}_{0,n}$ proiettato sulla base $\{e_j\}$.

Per costruzione, si ha

$$\mathbf{F}(t_*, \mathbf{u}_*, \mathbf{y}_*, \mathbf{u'}_*, \mathbf{y'}_*) = 0 \tag{4.58}$$

$$\mathbf{G}(t_*, \mathbf{u}_*, \mathbf{y}_*, \mathbf{u'}_*, \mathbf{y'}_*) = 0. \tag{4.59}$$

È ora possibile applicare il Teorema della Funzione Implicita (cfr. Appendice, Teorema 36), grazie al quale si può ridurre il sistema in forma normale (almeno localmente)

$$(\mathbf{u'}(t), \mathbf{y'}(t)) = \mathscr{E}(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)). \tag{4.60}$$

Osservazione 12. *Si noti che, grazie alla regolarità delle funzioni coinvolte, $\mathscr{E}$ è una funzione continua e lipschitziana rispetto alle variabili $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$*

$$\|\mathscr{E}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{y}_1) - \mathscr{E}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{y}_2)\|_{\boldsymbol{R}^{2n}}(t) \leq c_L \|(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{y}_1) - (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{y}_2)\|_{\boldsymbol{R}^{2n}}(t) \quad \forall t \in (0,T). \tag{4.61}$$

Per poter provare l'esistenza di una soluzione del problema (P_n), ci si può ricondurre ad un problema di punto fisso ed applicare opportunamente il Teorema di Banach-Caccioppoli delle Contrazioni (cfr. Appendice, Teorema 35).

Sia $\tau < (c_L)^{-1}$ e si integri l'espressione (4.60) sull'intervallo $(0,t)$, con $t \in (0,\tau)$

$$(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) - (\mathbf{u}_{0,n}, \mathbf{y}_{0,n}) = \int_0^t \mathscr{E}(s, \mathbf{u}(s), \mathbf{y}(s))ds, \tag{4.62}$$

ove si è posto $\mathbf{u}_{0,n}$ uguale ai coefficienti della funzione $\vartheta_{0,n}$, rispetto alla base $\{e_j\}$, e analogamente $\mathbf{y}_{0,n}$ è il vettore dei coefficienti di $\chi_{0,n}$, rispetto alla base $\{b_j\}$.

Si può riscrivere l'espressione nel modo seguente

$$(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) = F(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) \tag{4.63}$$

dove

$$F(t, \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) = (\mathbf{u}_{0,n}, \mathbf{y}_{0,n}) + \int_0^t \mathscr{E}(s, \mathbf{u}(s), \mathbf{y}(s))ds. \tag{4.64}$$

Vale la seguente catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned} &\|F(t, \mathbf{u}_1(t), \mathbf{y}_1(t)) - F(t, \mathbf{u}_2(t), \mathbf{y}_2(t))\|_{\mathbf{R}^{2n}} \\ &= \left\| \int_0^t \mathscr{E}(s, \mathbf{u}_1(s), \mathbf{y}_1(s)) - \mathscr{E}(s, \mathbf{u}_2(s), \mathbf{y}_2(s))ds \right\|_{\mathbf{R}^{2n}} \\ &\leq c_L \int_0^t \|(\mathbf{u}_1, \mathbf{y}_1) - (\mathbf{u}_2, \mathbf{y}_2)\|_{\mathbf{R}^{2n}}(s)ds \\ &\leq c_L \tau \|(\mathbf{u}_1, \mathbf{y}_1) - (\mathbf{u}_2, \mathbf{y}_2)\|_{C^0([0,\tau];\mathbf{R}^{2n})} \quad \forall t \in (0,\tau). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Passando all'estremo superiore rispetto a $t \in (0, \tau)$ al primo membro, si ha

$$\|F(\mathbf{u}_1, \mathbf{y}_1) - F(\mathbf{u}_2, \mathbf{y}_2)\|_{C^0([0,\tau];\mathbf{R}^{2n})} \leq c_L \tau \, \|(\mathbf{u}_1, \mathbf{y}_1) - (\mathbf{u}_2, \mathbf{y}_2)\|_{C^0([0,\tau];\mathbf{R}^{2n})} . \quad (4.66)$$

L'operatore F risulta, dunque, essere una contrazione. Per il Teorema di Punto Fisso (cfr. Appendice, Teorema 35), esiste un'unica soluzione locale (definita nell'intervallo $[0, \tau)$) del problema di Cauchy discretizzato.

D'altra parte, le soluzioni (ϑ_n, χ_n) sono continue nella variabile temporale; si può, quindi, considerare un nuovo problema, analogo al problema discreto appena considerato, avente come dati iniziali la coppia $(\vartheta_n(\tau), \chi_n(\tau)) \in V_n \times W_n$. Ripetendo tutti i ragionamenti sin qui svolti, si giungerà all'esistenza di una coppia di soluzioni con la medesima regolarità della coppia precedente, definite nell'intervallo $(\tau, 2\tau)$ e che si raccorda con continuità con la soluzione appena trovata.

In generale, applicando iterativamente i ragionamenti appena svolti con dati iniziali uguali ai dati finali del passo precedente si trova la soluzione globale definita su tutto l'intervallo $[0, T]$

$$\vartheta_n \in C^1([0, T]; V_n) \quad (4.67)$$

$$\chi_n \in C^1([0, T]; W_n). \quad (4.68)$$

Osservazione 13. *Il procedimento per la dimostrazione dell'esistenza della soluzione del problema discreto risulta analogo anche nel caso in cui si indeboliscano le ipotesi sui termini di sorgente.*

Infatti, si supponga che, invece di $g \in C^0([0, T]; H)$, il termine di sorgente sia meno regolare

$$g \in L^2(0, T; H), \quad (4.69)$$

mentre la regolarità del termine di bordo h resti immutata

$$h \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)) \cap W^{1,1}(0, T; L^2(\Gamma)). \quad (4.70)$$

In tal caso, per risolvere il problema discreto è necessario approssimare anche l'operatore di sorgente $w \in L^2(0, T; V')$ mediante una successione di funzioni $\{w_k\}$ così definite

$$\langle w_k(t), v \rangle = \int_\Omega g_k(t) v + \int_\Gamma h_k(t) v, \quad (4.71)$$

ove $\{g_k\} \subseteq C^0([0, T]; H)$ tale che $g_k \to g$ in $L^2(0, T; H)$ e $\{h_k\} \subseteq C^1([0, T]; L^2(\Gamma))$ tale che $h_k \to h$ in $L^2(0, T; L^2(\Gamma)) \cap W^{1,1}(0, T; L^2(\Gamma))$, per k tendente a $+\infty$.

Tali ipotesi implicano $\{w_k\} \subseteq C^0([0,T];V')$; infatti,

$$\begin{aligned}
\|w_k\|_{C^0([0,T];V')} &= \sup_{t\in[0,T]} \left[\sup_{\|v\|_V=1} {}_{V'}\langle w_k(t), v\rangle_V \right] \\
&= \sup_{t\in[0,T]} \left[\sup_{\|v\|_V=1} \int_\Omega g_k(t) v dx + \int_\Gamma h_k(t) v ds \right] \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} \left[\sup_{\|v\|_V=1} \|g_k(t)\|_H \|v\|_V + \|h_k(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_V \right] \\
&\leq \|g_k\|_{C^0([0,T];H)} + \|h_k\|_{C^1([0,T];L^2(\Gamma))} \, . \qquad (4.72)
\end{aligned}$$

Per la ricerca del punto $(t_*, \boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{y}_*, \boldsymbol{u'}_*, \boldsymbol{y'}_*)$ tale che

$$\boldsymbol{E}(t_*, \boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{y}_*, \boldsymbol{u'}_*, \boldsymbol{y'}_*) = 0, \qquad (4.73)$$

si svolgono analoghi ragionamenti, ma per individuare il vettore $\boldsymbol{u'}_*$, si ricorre ad una nuova successione di funzioni $w_n \in C^0([0,T];V_n)$,

$$w_n(t) = \sum_{i=1}^{n} (w_k)_i(t) e_i, \qquad (4.74)$$

e si considera il termine $w_n(0) \in V_n$.

4.2.2 Stime uniformi in n

L'obiettivo delle prossime sezioni è il passaggio al limite per n tendente a $+\infty$ nel problema (P_n) per poter trovare una soluzione del problema (P_ε), con $\varepsilon > 0$ fissato. A questo proposito saranno svolte alcune stime a priori, indipendenti da n.

In questo capitolo e nei seguenti, si assumerà la convenzione secondo la quale il simbolo c denota una costante dipendente esclusivamente dai dati; il valore di c potrà variare nelle diverse stime e anche all'interno di una stessa catena di disuguaglianze. Qualora compaia, invece, una costante del tipo c_ε, essa indica una costante dipendente dai dati e dal parametro ε, ma non dall'indice n. Le costanti indicate come c_δ, infine, indicano una dipendenza dal paramentro positivo δ, ma ancora indipendenti di n.

Prima stima a priori

Per ottenere la stima di base, detta anche "stima dell'energia", si testi la prima equazione (4.34) per $v = \vartheta_n(t)$ e la seconda equazione (4.35) per $u = \partial_t \chi_n(t)$; si noti che le funzioni test appena considerate sono ammissibili poiché $\vartheta_n \in C^1([0,T];V_n)$ e $\chi_n \in C^1([0,T];W_n)$.

Si integrino, poi, le equazioni equazioni risultanti sull'intervallo $(0,t)$, con $t \in (0,T]$

$$\int_{Q_t} \partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_n)\vartheta_n + \int_{Q_t} \partial_t \chi_n \vartheta_n + \int_{Q_t} |\nabla \vartheta_n|^2 + \int_{\Sigma_t} \alpha\, |\vartheta_n|^2 = \int_{Q_t} w \vartheta_n \quad (4.75)$$

$$\mu \int_{Q_t} |\partial_t \chi_n|^2 + \int_{Q_t} \nabla \chi_n \cdot \partial_t\left(\nabla \chi_n\right) + \int_{Q_t} \left[\beta'_\varepsilon(\chi_n) + \sigma'(\chi_n)\right] \partial_t \chi_n = \int_{Q_t} \vartheta_n \partial_t \chi_n. \quad (4.76)$$

Sommando membro a membro le due equazioni, dopo aver riordinato opportunamente i termini, si ottiene la seguente espressione

$$\int_{Q_t} \partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_n)\vartheta_n + \int_{Q_t} |\nabla \vartheta_n|^2 + \int_{\Sigma_t} \alpha\, |\vartheta_n|^2 + \mu \int_{Q_t} |\partial_t \chi_n|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \chi_n(t)|^2$$
$$+ \int_\Omega \beta_\varepsilon(\chi_n(t)) = \int_{Q_t} w\vartheta_n - \int_{Q_t} \sigma'(\chi_n)\partial_t \chi_n + \int_\Omega \beta_\varepsilon(\chi_{0,n}) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \chi_{0,n}|^2. \quad (4.77)$$

Per non minare la chiarezza della trattazione, ogni termine verrà stimato separatamente.

Innanzitutto, si può riscrivere il primo termine nel seguente modo

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} \partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_n)\vartheta_n &= \int_{Q_t} \mathrm{Log}'_\varepsilon(\vartheta_n)\vartheta'_n \vartheta_n = \int_{Q_t} I'_\varepsilon(\vartheta_n)\vartheta'_n \\ &= \int_{Q_t} \frac{d}{dt}\left(I_\varepsilon \vartheta_n\right) = \int_\Omega I_\varepsilon(\vartheta_n(t)) - \int_\Omega I_\varepsilon(\vartheta_{0,n}); \end{aligned} \quad (4.78)$$

l'ultimo termine che compare a destra della disuguaglianza viene spostato al secondo membro dell'equazione (4.77) e così stimato

$$\int_\Omega I_\varepsilon(\vartheta_{0,n}) \le \int_\Omega \left[\frac{\varepsilon}{2}\, |\vartheta_{0,n}|^2 + 2\vartheta_{0,n}\right] \le c \quad (4.79)$$

dove si è usato il Lemma 9 e il fatto che la successione dei $\{\vartheta_{0,n}\}$ è uniformemente limitata in V, grazie alla (4.33).

Si considerino adesso il secondo e terzo termine dell'equazione (4.77): utilizzando l'ipotesi (3.4) sulla funzione α, essi sono minorati dalla norma della funzione ϑ_n nello spazio $L^2(0,t;V)$, a meno di una costante positiva

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} |\nabla \vartheta_n|^2 + \int_{\Sigma_t} \alpha\, |\vartheta_n|^2 &\ge \|\nabla \vartheta_n\|^2_{L^2(0,t;H)} + \overline{\alpha} \int_{\Sigma_t} |\vartheta_n|^2 \\ &\ge \overline{c}\, \|\vartheta_n\|^2_{L^2(0,t;V)}\,. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Si passi a stimare i termini che compaiono a secondo membro: ricordando la definizione di w (si veda (3.10)), si ha

$$\left|\int_{Q_t} g\vartheta_n\right| \le \|g\vartheta_n\|_{L^1(Q_t)} \le \|g\|_{L^2(Q_t)} \|\vartheta_n\|_{L^2(Q_t)} \le \delta\, \|\vartheta_n\|^2_{L^2(Q_t)} + c_\delta\, \|g\|^2_{L^2(Q_t)}\,, \quad (4.81)$$

ove si è applicato, rispettivamente, la disuguaglianza di Hölder e la disuguaglianza di Young (cfr. Appendice, Proposizione 29).

Analogamente

$$\left|\int_{\Sigma_t} h\vartheta_n\right| \leq \delta \|\vartheta_n\|^2_{L^2(\Sigma_t)} + c_\delta \|h\|^2_{L^2(\Sigma_t)} \leq \delta \|\vartheta_n\|^2_{L^2(0,t;V)} + c_\delta \|h\|^2_{L^2(\Sigma_t)}, \tag{4.82}$$

ove si è applicato il Teorema di Traccia (cfr. Appendice, Teorema 33) all'ultima maggiorazione.

Gli ultimi termini che compaiono nel membro destro dell'equazione (4.77) sono uniformemente limitati da una costante

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \beta_\varepsilon(\chi_{0,n}) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\chi_{0,n}|^2 &= \int_\Omega \left[\int_0^{\chi_{0,n}} \beta'_\varepsilon(s)ds\right] + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\chi_{0,n}|^2 \\
&\leq \frac{c}{\varepsilon}\int_\Omega |\chi_{0,n}|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\chi_{0,n}|^2 \\
&\leq \frac{c}{\varepsilon}\|\chi_{0,n}\|^2_H + c\|\chi_{0,n}\|^2_V \leq c_\varepsilon,
\end{aligned} \tag{4.83}$$

ove si è usato il fatto che β'_ε è una funzione lipschitziana con costante di lipschitzianità $1/\varepsilon$ (come già ricordato nell'Osservazione 7) e l'uniforme limitatezza delle norme dei $\chi_{0,n}$ in V (si veda (4.33)).

A questo punto, si sommi a entrambi i membri il termine $1/2\,\|\chi_n(t)\|^2_H$, in modo tale che nel membro sinistro della disuguaglianza compaia la norma di $\chi_n(t)$ nello spazio V; il termine a destra viene, invece, stimato assieme al termine in σ' nel seguente modo: utlizzando la proprietà di lipschitzianità della funzione σ' (si veda (3.13)), la disuguaglianza di Young e l'ipotesi (4.33) sulla successione di funzioni $\{\chi_{0,n}\}$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\chi_n(t)\|^2_H - \int_{Q_t}\sigma'(\chi_n)\partial_t\chi_n &= \int_{Q_t}\chi_n(\partial_t\chi_n) + \frac{1}{2}\|\chi_{0,n}\|^2_H - \int_{Q_t}\sigma'(\chi_n)\partial_t\chi_n \\
&\leq \frac{1}{2}\|\chi_{0,n}\|^2_H + \int_0^t\int_\Omega \chi_n(\partial_t\chi_n) + c_\sigma\int_0^t\int_\Omega (1+|\chi_n|)\,\partial_t\chi_n \\
&\leq c\|\chi_{0,n}\|^2_H + \delta\|\partial_t\chi_n\|^2_{L^2(Q_t)} + c_\delta\int_0^t \|\chi_n(s)\|^2_H\,ds \\
&\leq c\|\chi_{0,n}\|^2_H + \delta\|\partial_t\chi_n\|^2_{L^2(Q_t)} + c_\delta\int_0^t \|\chi_n(s)\|^2_V\,ds,
\end{aligned} \tag{4.84}$$

per ogni $\delta > 0$.

Raccogliendo tutti i termini stimati e scegliendo $0 < \delta < \min\{\overline{c}/2, \mu\}$, si può applicare il Lemma di Gronwall-Bellman (cfr. Appendice, Lemma 22) e concludere che per ogni $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega I_\varepsilon(\vartheta_n(t)) + \|\vartheta_n\|^2_{L^2(0,t;V)} + \mu\|\partial_t\chi_n\|^2_{L^2(0,t;H)} + \frac{1}{2}\|\nabla\chi_n(t)\|^2_H \\
+ \|\chi_n(t)\|^2_H + \int_\Omega \beta_\varepsilon(\chi_n(t)) \leq c_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Passando all'estremo superiore sull'intervallo $(0,T)$, si ha

$$\|I_\varepsilon(\vartheta_n)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\vartheta_n\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|\chi_n\|^2_{H^1(0,T;H)} + \|\chi_n\|^2_{L^\infty(0,T;V)} \\ + \|\beta_\varepsilon(\chi_n)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \le c_\varepsilon. \tag{4.86}$$

Seconda stima a priori

L'obiettivo di questa stima è la ricerca di una limitazione a priori per la norma di $\partial_t\vartheta_n$ in $L^2(0,T;H)$. Si testi l'equazione (4.34) per $v = \partial_t\vartheta_n(t)$ e si integri sull'intervallo temporale $(0,t)$, con $t \in (0,T]$. Anche in questo caso, la funzione test risulta ammissibile grazie alla regolarità della soluzione ϑ_n.

$$\int_{Q_t} \partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_n)\partial_t\vartheta_n + \int_{Q_t} (\partial_t\chi_n)(\partial_t\vartheta_n) + \int_{Q_t} \nabla\vartheta_n \cdot \nabla(\partial_t\vartheta_n) + \int_{\Sigma_t} \alpha\vartheta_n(\partial_t\vartheta_n) \\ = \int_{Q_t} w(\partial_t\vartheta_n) \tag{4.87}$$

ossia,

$$\int_{Q_t} \mathrm{Log}'_\varepsilon(\vartheta_n)\,|\partial_t\vartheta_n|^2 + \int_{Q_t} (\partial_t\chi_n)(\partial_t\vartheta_n) + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla\vartheta_n(s)\|^2_H\right) + \int_{\Sigma_t} \alpha\vartheta_n(\partial_t\vartheta_n) \\ = \int_{Q_t} g_n\partial_t\vartheta_n + \int_{\Sigma_t} h_n\partial_t\vartheta_n. \tag{4.88}$$

Ogni termine sarà nuovamente analizzato separatamente.

Sfruttando le limitazioni trovate nel Lemma 8 sulla funzione $\mathrm{Log}'_\varepsilon$, il primo termine è facilmente manipolabile

$$\int_{Q_t} \mathrm{Log}'_\varepsilon(\vartheta_n)\,|\partial_t\vartheta_n|^2 \ge \varepsilon\,\|\partial_t\vartheta_n\|^2_{L^2(0,t;H)}\,. \tag{4.89}$$

Si sposti il secondo termine a destra dell'equazione e lo si stimi nel modo seguente

$$\left|\int_{Q_t} (\partial_t\chi_n)(\partial_t\vartheta_n)\right| \le \|\partial_t\chi_n\|_{L^2(0,t;H)}\,\|\partial_t\vartheta_n\|_{L^2(0,t;H)} \\ \le \delta\,\|\partial_t\vartheta_n\|^2_{L^2(0,t;H)} + c_\delta\,\|\partial_t\chi_n\|^2_{L^2(0,T;H)}\,, \tag{4.90}$$

ove si sono applicate, rispettivamente, la disuguaglianza di Hölder e quella di Young (cfr. Appendice, Proposizione 29); il primo termine finale verrà spostato a primo membro, dopo aver scelto un δ opportuno sufficientemente piccolo, e il secondo termine è limitato uniformemente da una costante grazie alla stima (4.86).

Il terzo termine viene semplicemente riscritto

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla\vartheta_n(s)\|^2_H\right) = \frac{1}{2}\,\|\nabla\vartheta_n(t)\|^2_H - \frac{1}{2}\,\|\nabla\vartheta_{0,n}\|^2_H \tag{4.91}$$

e l'ultimo addendo della stima viene spostato al membro destro dell'equazione (4.88), poiché è uniformemente limitato da una costante indipendente da n, grazie a (4.33).

Infine, il termine di bordo risulta minorato dalla norma di $\vartheta_n(t)$ nell spazio $L^2(\Gamma)$ e da una costante positiva, indipendente da n, che verrà spostata al secondo membro,

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_t} \alpha\vartheta_n(\partial_t\vartheta_n) &\geq \overline{\alpha}\int_{\Sigma_t}\vartheta_n(\partial_t\vartheta_n) = \overline{\alpha}\int_{\Sigma_t}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|\vartheta_n|^2\right] \\
&= \frac{\overline{\alpha}}{2}\int_\Gamma |\vartheta_n(t)|^2 - \frac{\overline{\alpha}}{2}\int_\Gamma |\vartheta_{0,n}|^2 \geq \frac{\overline{\alpha}}{2}\|\vartheta_n(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} - c\|\vartheta_{0,n}\|^2_V \\
&\geq \frac{\overline{\alpha}}{2}\|\vartheta_n(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} - c, \qquad (4.92)
\end{aligned}$$

grazie all'ipotesi (3.4) sulla funzione α, al Teorema di Traccia (cfr. Appendice, Teorema 33) e alla (4.33).

Per quanto riguarda il secondo membro dell'equazione (4.88), che coinvolge i termini di sorgente g e h, si svolgono le stime seguenti

$$\begin{aligned}
\int_{Q_t} g\partial_t\vartheta_n &\leq \delta\|\partial_t\vartheta_n\|^2_{L^2(0,t;H)} + c_\delta\|g\|^2_{L^2(0,T;H)}; \qquad (4.93) \\
\int_{\Sigma_t} h\partial_t\vartheta_n &= \int_\Gamma h(t)\vartheta_n(t) - \int_\Gamma h(0)\vartheta_{0,n} - \int_{\Sigma_t}(\partial_t h)\vartheta_n \\
&\leq \delta\|\vartheta_n(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + c_\delta\|h(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|\vartheta_{0,n}\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|h(0)\|^2_{L^2(\Gamma)} \\
&\quad + \int_0^t \|\partial_t h(s)\|_{L^2(\Gamma)}\|\vartheta_n(s)\|_{L^2(\Gamma)}\,ds \\
&\leq \delta\|\vartheta_n(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + c\|h\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma))} + \|\vartheta_{0,n}\|^2_V \\
&\quad + \int_0^t \|\partial_t h(s)\|_{L^2(\Gamma)}\|\vartheta_n(s)\|_{L^2(\Gamma)}\,ds; \qquad (4.94)
\end{aligned}$$

nella stima del termine di bordo, il secondo e il terzo addendo sono uniformemente limitati, poiché $h \in L^2(0,T;L^2(\Gamma)) \cap W^{1,1}(0,T;L^2(\Gamma))$ e grazie a (4.33); inoltre, la funzione $\|\partial_t h(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)}$ appartiene allo spazio $L^1(0,T)$.

Concludendo, a seguito le stime svolte, si scelga $0 < \delta \leq \min\{\overline{\alpha}/4, \varepsilon/4\}$, in modo da poter applicare il Lemma di Gronwall (cfr. Appendice, Lemma 23); si ottiene, quindi, la seguente disuguaglianza $\forall t \in (0,T)$

$$\|\partial_t\vartheta_n\|^2_{L^2(0,t;H)} + \|\vartheta_n(t)\|^2_V \leq c_\varepsilon. \qquad (4.95)$$

Passando, quindi, all'estremo superiore sull'intervallo $(0,T)$, si ottiene in particolare

$$\|\vartheta_n\|^2_{L^\infty(0,T;V)} + \|\partial_t\vartheta_n\|^2_{L^2(0,T;H)} \leq c_\varepsilon. \qquad (4.96)$$

4.2.3 Passaggio al limite per $n \nearrow +\infty$

A seguito delle stime a priori ottenute nel passaggi precedenti, si può calcolare il limite per n tendente a $+\infty$ e tale limite esiste, almeno per una sottosuccessione di

$n \nearrow +\infty$; esistono, quindi,

$$\vartheta_\varepsilon \in H^1(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V) \tag{4.97}$$
$$\chi_\varepsilon \in H^1(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V) \tag{4.98}$$

tali che

$$\vartheta_n \xrightarrow{n\to+\infty} \vartheta_\varepsilon \quad \text{debolmente in } H^1(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V) \tag{4.99}$$
$$\chi_n \xrightarrow{n\to+\infty} \chi_\varepsilon \quad \text{debolmente in } H^1(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V). \tag{4.100}$$

Proposizione 14. *Risultano verificate le condizioni di Cauchy sui dati iniziali:*

$$\vartheta_\varepsilon(0) = \vartheta_{0,\varepsilon} \tag{4.101}$$
$$\chi_\varepsilon(0) = \chi_0 \tag{4.102}$$

in H e quasi ovunque in Ω.

Dimostrazione. Si noti che, grazie all'immersione continua dello spazio $H^1(0,T;H)$ in $C^0([0,T];H)$, ha senso valutare le funzioni ϑ_ε e χ_ε in $t=0$. Inoltre, la convergenza debole di una successione nello spazio $H^1(0,T;H)$ implica la convergenza debole dei rispettivi dati iniziali. Quindi, si ha per n tendente a $+\infty$

$$\vartheta_n(0) = \vartheta_{0,n} \rightharpoonup \vartheta_\varepsilon(0) \quad \text{in } H \tag{4.103}$$
$$\chi_n(0) = \chi_{0,n} \rightharpoonup \chi_\varepsilon(0) \quad \text{in } H. \tag{4.104}$$

D'altra parte, per costruzione, si ha per n tendente a $+\infty$ (si veda (4.31) e (4.32))

$$\vartheta_{0,n} \to \vartheta_{0,\varepsilon} \quad \text{in } V \tag{4.105}$$
$$\chi_{0,n} \to \chi_0 \quad \text{in } V; \tag{4.106}$$

per l'unicità del limite, segue dunque

$$\vartheta_\varepsilon(0) = \vartheta_{0,\varepsilon} \tag{4.107}$$
$$\chi_\varepsilon(0) = \chi_0 \tag{4.108}$$

in H e quasi ovunque in Ω. $\square$

Applicando il Lemma di Aubin (cfr. Appendice, Lemma 24), si può concludere che, almeno per una sottosuccessione di $n \nearrow +\infty$,

$$\vartheta_n \to \vartheta_\varepsilon \quad \text{in } L^2(0,T;H) \tag{4.109}$$
$$\chi_n \to \chi_\varepsilon \quad \text{in } L^2(0,T;H). \tag{4.110}$$

Inoltre, la convergenza forte implica convergenza puntuale (quasi ovunque) in Q.

Proposizione 15. *Dai ragionamenti precedenti, segue che*

$$\beta'_\varepsilon(\chi_n) \to \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) \quad \textit{in } L^2(0,T;H), \textit{ per } n \to +\infty. \tag{4.111}$$

Dimostrazione. Si ricordi che β'_ε è una funzione lipschitziana

$$\left|\beta'_\varepsilon(\chi_n(x,t)) - \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon(x,t))\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}\left|\chi_n(x,t) - \chi_\varepsilon(x,t)\right| \quad \forall (x,t) \in Q. \tag{4.112}$$

Grazie a questa proprietà, vale la seguente catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned} \left\|\beta'_\varepsilon(\chi_n) - \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\right\|^2_{L^2(0,T;H)} &= \int_0^T \left[\int_\Omega \left|\beta'_\varepsilon(\chi_n(x,t)) - \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon(x,t))\right|^2\right] \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \left[\int_\Omega |\chi_n(x,t) - \chi_\varepsilon(x,t)|^2\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\|\chi_n - \chi_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0, \end{aligned} \tag{4.113}$$

da cui segue la tesi. □

Con analoghi ragionamenti si prova che per n tendente a $+\infty$

$$\sigma'(\chi_n) \to \sigma'(\chi_\varepsilon) \quad \text{in } L^2(0,T;H) \tag{4.114}$$

$$\mathrm{Log}_\varepsilon(\vartheta_n) \to \mathrm{Log}_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) \quad \text{in } L^2(0,T;H), \tag{4.115}$$

poiché anche σ' e Log_ε sono funzioni lipschitziane. Inoltre, per confronto nella prima equazione, si ha

$$\|\partial_t\left(\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_n\right)\|_{L^2(0,T;V')} \leq c_\varepsilon. \tag{4.116}$$

Questa stima implica che esiste $\xi \in L^2(0,T;V')$ tale che

$$\partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \xi \quad \text{in } L^2(0,T;V'), \tag{4.117}$$

almeno per una sottosuccessione di $n \nearrow +\infty$; ossia, $\forall v \in L^2(0,T;V)$

$$\int_0^T \langle\partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_n), v\rangle \xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^T \langle\xi, v\rangle \quad \text{in } \mathbf{R}. \tag{4.118}$$

D'altra parte, integrando per parti in tempo, si ha

$$\int_0^T \langle\partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_n), v\rangle = \langle\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_n, v\rangle\big|_0^T - \int_0^T \langle\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_n, \partial_t v\rangle \tag{4.119}$$

e, grazie alle convergenze appena trovate,

$$\begin{aligned} \langle\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_n, v\rangle\big|_0^T &\xrightarrow{n\to+\infty} \langle\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_\varepsilon, v\rangle\big|_0^T \\ -\int_0^T \langle\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_n, \partial_t v\rangle &\xrightarrow{n\to+\infty} -\int_0^T \langle\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_\varepsilon, \partial_t v\rangle \\ &= -\langle\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_\varepsilon, v\rangle\big|_0^T + \int_0^T \langle\partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_\varepsilon), v\rangle. \end{aligned} \tag{4.120}$$

Per l'unicità del limite, segue:

$$\xi = \partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon) \quad \text{in } L^2(0,T;V'). \tag{4.121}$$

In conclusione, rimane da verificare che la coppia $(\vartheta_\varepsilon, \chi_\varepsilon)$ sia una soluzione del problema (P_ε).

Sia $n \in \mathbf{N}$ e si testino le equazioni (4.34) e (4.35) del problema (P_n) per due arbitrarie funzioni v e u appartenenti agli spazi $L^2(0,T;V_m)$ e $L^2(0,T;W_m)$ rispettivamente, con $m \leq n$; quindi, si integri nuovamente su $(0,T)$

$$\int_Q \partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_n + \chi_n)v + \int_Q \nabla\vartheta_n \cdot \nabla v + \int_\Sigma \alpha\vartheta_n v = \int_Q gv + \int_\Sigma hv \tag{4.122}$$

$$\mu\int_Q (\partial_t\chi_n)u + \int_Q \nabla\chi_n \cdot \nabla u + \int_Q \beta'_\varepsilon(\chi_n)u + \int_Q \sigma'(\chi_n)u = \int_Q \vartheta_n u. \tag{4.123}$$

Mandando $n \to +\infty$ e sfruttando le convergenze trovate, si ottiene:

$$\int_Q \partial_t(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon + \chi_\varepsilon)v + \int_Q \nabla\vartheta_\varepsilon \cdot \nabla v + \int_\Sigma \alpha\vartheta_\varepsilon v = \int_Q gv + \int_\Sigma hv \tag{4.124}$$

$$\mu\int_{Q_t} (\partial_t\chi_\varepsilon)u + \int_Q \nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla u + \int_Q \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)u + \int_Q \sigma'(\chi_\varepsilon)u = \int_Q \vartheta_\varepsilon u \tag{4.125}$$

per ogni $v \in L^2(0,T;V_m)$ e $u \in L^2(0,T;W_m)$, $\forall m \in \mathbf{N}$. Poiché m è arbitrario, la stessa equazione variazionale risulta soddisfatta per ogni $v \in L^2(0,T;V)$, per densità.

Quindi, la coppia $(\vartheta_\varepsilon, \chi_\varepsilon)$ soddisfa la formulazione variazionale del problema (P_ε) e risulta, dunque, esserne soluzione.

Per confronto nella seconda equazione (4.125), si ha $\forall v \in L^2(0,T;V)$

$$-\int_Q \Delta\chi_\varepsilon v = \int_Q \nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla v = \int_Q \vartheta_\varepsilon v - \int_Q (\partial_t\chi_\varepsilon)v - \int_Q \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)v - \int_Q \sigma'(\chi_\varepsilon)v; \tag{4.126}$$

grazie alla regolarità dei termini a destra, si ottiene

$$-\Delta\chi_\varepsilon = \vartheta_\varepsilon - \partial_t\chi_\varepsilon - \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) - \sigma'(\chi_\varepsilon) \quad \in L^2(0,T;H), \tag{4.127}$$

quindi, per quasi ogni $t \in (0,T)$,

$$-\Delta\chi_\varepsilon(t) = \vartheta_\varepsilon(t) - \partial_t\chi_\varepsilon(t) - \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon(t)) - \sigma'(\chi_\varepsilon(t)) \quad \in H. \tag{4.128}$$

Allora, grazie al Teorema di regolarità ellittica (cfr. Appendice, Teorema 31), si può concludere che

$$\|\chi_\varepsilon(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq c\,(\|m_\varepsilon(t)\|_H + \|\chi_\varepsilon(t)\|_H) \tag{4.129}$$

per quasi ogni $t \in (0,T)$; ove si è posto $m_\varepsilon := \vartheta_\varepsilon - \partial_t\chi_\varepsilon - \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) - \sigma'(\chi_\varepsilon)$.

Elevando i termini al quadrato ed integrando sull'intervallo $(0,T)$, si ha

$$\|\chi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq c\left[\|m\|_{L^2(0,T;H)} + \|\chi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H)}\right]; \tag{4.130}$$

inoltre, la soluzione χ_ε soddsifa le condizioni di Neumann omogenee al bordo; quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato,

$$\chi_\varepsilon \in L^2(0,T;D(A;H)). \tag{4.131}$$

4.2.4 Unicità della soluzione del problema (P_ε)

Resta da dimostrare l'unicità della soluzione $(\vartheta_\varepsilon, \chi_\varepsilon)$ appena trovata. L'idea della stima seguente è tratta dall'articolo [3], Sez. 5.

Si consideri la prima equazione (4.23) del problema (P_ε) integrata formalmente in tempo e la seconda equazione (4.24)

$$\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon + \chi_\varepsilon + 1 * B\vartheta_\varepsilon = 1 * w + \eta_{0,\varepsilon} \tag{4.132}$$

$$\mu \partial_t \chi_\varepsilon + A\chi_\varepsilon + \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) + \sigma'(\chi_\varepsilon) = \vartheta_\varepsilon, \tag{4.133}$$

ove si è posto $\eta_{0,\varepsilon} := \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon} + \chi_0$.

Si scriva il sistema per due soluzioni $(\vartheta_{\varepsilon,1}, \chi_{\varepsilon,1})$ e $(\vartheta_{\varepsilon,2}, \chi_{\varepsilon,2})$ e si sottraggano rispettivamente le prime due equazioni

$$\begin{aligned}&[\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{\varepsilon,1} - \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{\varepsilon,2}] + [\chi_{\varepsilon,1} - \chi_{\varepsilon,2}] + 1 * B(\vartheta_{\varepsilon,1} - \vartheta_{\varepsilon,2}) \\ &\qquad = 1 * (w_1 - w_2) + [\eta_{0,\varepsilon,1} - \eta_{0,\varepsilon,2}],\end{aligned} \tag{4.134}$$

e le seconde due

$$\begin{aligned}&\mu \partial_t (\chi_{\varepsilon,1} - \chi_{\varepsilon,2}) - A(\chi_{\varepsilon,1} - \chi_{\varepsilon,2}) + \left[\beta'_\varepsilon(\chi_{\varepsilon,1}) - \beta'_\varepsilon(\chi_{\varepsilon,2})\right] + [\sigma'(\chi_{\varepsilon,1}) - \sigma'(\chi_{\varepsilon,2})] \\ &\qquad = \vartheta_{\varepsilon,1} - \vartheta_{\varepsilon,2},\end{aligned} \tag{4.135}$$

dove $(w_i, \eta_{0,\varepsilon,i})$, $i = 1, 2$, sono due insiemi di dati relativi ai problemi considerati.

A questo punto, si testi la (4.134) per $\vartheta_\varepsilon := \vartheta_{\varepsilon,1} - \vartheta_{\varepsilon,2}$ e la (4.135) per $\chi_\varepsilon := \chi_{\varepsilon,1} - \chi_{\varepsilon,2}$ e si integrino le due espressioni sull'intervallo temporale $(0, t)$, con $t \in (0, T]$; quindi, si sommino le due equazioni membro a membro

$$\begin{aligned}&\int_{Q_t} [\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{\varepsilon,1} - \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{\varepsilon,2}]\vartheta_\varepsilon + \int_{Q_t} (1 * \nabla\vartheta_\varepsilon)\nabla\vartheta_\varepsilon + \int_{\Sigma_t} (1 * \alpha\vartheta_\varepsilon)\vartheta_\varepsilon \\ &\quad + \mu \int_{Q_t} (\partial_t \chi_\varepsilon)\chi_\varepsilon + \int_{Q_t} |\nabla\chi_\varepsilon|^2 + \int_{Q_t} \left[\beta'_\varepsilon(\chi_{\varepsilon,1}) - \beta'_\varepsilon(\chi_{\varepsilon,2})\right] \chi_\varepsilon \\ &\quad = \int_{Q_t} (1 * w + \eta_{0,\varepsilon})\vartheta_\varepsilon - \int_{Q_t} [\sigma'(\chi_{\varepsilon,1}) - \sigma'(\chi_{\varepsilon,2})]\chi_\varepsilon.\end{aligned} \tag{4.136}$$

ove si è introdotta una notazione analoga per tutte le differenze considerate (per esempio: $w := w_1 - w_2$, etc.).

Si considerino prima di tutto i termini non lineari. Il primo e l'ultimo termine sul lato sinistro dell'equazione, danno contributi non negativi, poiché sia Log_ε sia β'_ε sono funzioni monotone

$$\int_{Q_t} [\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{\varepsilon,1} - \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{\varepsilon,2}]\vartheta_\varepsilon \;\geq\; 0 \tag{4.137}$$

$$\int_{Q_t} \left[\beta'_\varepsilon(\chi_{\varepsilon,1}) - \beta'_\varepsilon(\chi_{\varepsilon,2})\right] \chi_\varepsilon \;\geq\; 0. \tag{4.138}$$

Utilizzando la proprietà di lipschitzianità della funzione σ', si ottiene

$$\int_{Q_t} [\sigma'(\chi_{\varepsilon,1}) - \sigma'(\chi_{\varepsilon,2})]\chi_\varepsilon \leq c_L \int_{Q_t} |\chi_\varepsilon|^2 = c_L \int_0^t \|\chi_\varepsilon(s)\|_H^2 \, ds. \tag{4.139}$$

Il secondo termine dell'equazione (4.136) può essere riscritto nel seguente modo

$$\int_{Q_t} (1 * \nabla\vartheta_\varepsilon)\nabla\vartheta_\varepsilon = \int_{Q_t} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|1 * \nabla\vartheta_\varepsilon|^2\right] = \int_\Omega \frac{1}{2}|1 * \nabla\vartheta_\varepsilon(t)|^2 = \frac{1}{2}\|1 * \nabla\vartheta_\varepsilon(t)\|_H^2 , \tag{4.140}$$

mentre l'integrale di bordo è facilmente manipolabile

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} (1 * \alpha\vartheta_\varepsilon)\vartheta_\varepsilon &= \int_{\Sigma_t} \alpha(1 * \vartheta_\varepsilon)\vartheta_\varepsilon = \int_{\Sigma_t} \alpha\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|1 * \vartheta_\varepsilon|^2\right] \\ &\geq \frac{\overline{\alpha}}{2}\int_\Gamma |1 * \vartheta_\varepsilon(t)|^2 = \frac{\overline{\alpha}}{2}\|1 * \vartheta_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 . \end{aligned} \tag{4.141}$$

Risulta, quindi,

$$\int_{Q_t} (1 * \nabla\vartheta_\varepsilon)\nabla\vartheta_\varepsilon + \int_{\Sigma_t} (1 * \alpha\vartheta_\varepsilon)\vartheta_\varepsilon \geq \overline{c}\,\|1 * \vartheta_\varepsilon(t)\|_V^2 , \tag{4.142}$$

con $\overline{c} = \min\{1/2, \overline{\alpha}/4\}$.

Con analoghi ragionamenti, si può riscrivere il quarto termine nel modo seguente

$$\begin{aligned} \mu\int_{Q_t} (\partial_t\chi_\varepsilon)\chi_\varepsilon &= \mu\int_{Q_t} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|\chi_\varepsilon|^2\right] = \frac{\mu}{2}\int_\Omega |\chi_\varepsilon(t)|^2 - \frac{\mu}{2}\int_\Omega |\chi_0|^2 \\ &= \frac{\mu}{2}\|\chi_\varepsilon(t)\|_H^2 - \frac{\mu}{2}\|\chi_0\|_H^2 ; \end{aligned} \tag{4.143}$$

si sposta, poi, l'ultimo addendo a secondo membro.

Per quanto riguarda il lato destro dell'equazione (4.215), in cui compaiono i dati iniziali e i termini di sorgente, si ha

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} (1 * w + \eta_{0,\varepsilon})\vartheta_\varepsilon &= \int_\Omega (1 * g(t) + \eta_{0,\varepsilon})(1 * \vartheta_\varepsilon(t)) + \int_\Gamma (1 * h(t))(1 * \vartheta_\varepsilon(t)) \\ &\quad - \int_{Q_t} g(1 * \vartheta_\varepsilon) - \int_{\Sigma_t} h(1 * \vartheta_\varepsilon) \\ &\leq \delta\left[\int_\Omega |1 * \vartheta_\varepsilon(t)|^2 + \int_\Gamma |1 * \vartheta_\varepsilon(t)|^2\right] + c_\delta\int_\Omega \left[|1 * g(t)|^2 + |\eta_{0,\varepsilon}|^2\right] + c_\delta\int_\Gamma |1 * h(t)|^2 \\ &\quad + \int_0^t \|g(s)\|_H\,\|1 * \vartheta_\varepsilon(s)\|_H + \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma)}\,\|1 * \vartheta_\varepsilon(s)\|_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned} \tag{4.144}$$

per ogni $\delta > 0$, grazie alle disuguaglianze di Young e di Hölder.

Per chiarezza della trattazione, ogni termine verrà stimato separatamente. I primi due termini vengono così maggiorati

$$\delta\left[\int_\Omega |1 * \vartheta_\varepsilon(t)|^2 + \int_\Gamma |1 * \vartheta_\varepsilon(t)|^2\right] \leq \delta\,\|1 * \vartheta_\varepsilon(t)\|_V^2 ; \tag{4.145}$$

mentre i due termini seguenti risultano limitati dalle norme dei dati

$$\int_\Omega \left[|1*g(t)|^2 + |\eta_{0,\varepsilon}|^2\right] + \int_\Gamma |1*h(t)|^2 = \|1*g(t)\|_H^2 + \|\eta_{0,\varepsilon}\|_H^2 + \|1*h(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2$$
$$\leq \|1*g\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + \|\eta_{0,\varepsilon}\|_H^2 + \|1*h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma))}^2$$
$$\leq c\left[\|g\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|\eta_{0,\varepsilon}\|_H^2 + \|h\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}^2\right] \qquad (4.146)$$

ove si è applicato il Teorema di Young, con $r = \infty$ e $p = q = 2$, ai termini di convoluzione (cfr. Appendice, Teorema 30).

Gli ultimi termini, infine, vengono stimati nel modo seguente

$$\int_0^t \|g(s)\|_H \|1*\vartheta_\varepsilon(s)\|_H + \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma)} \|1*\vartheta_\varepsilon(s)\|_{L^2(\Gamma)}$$
$$\leq c\left[\int_0^t \|g(s)\|_H \|1*\vartheta_\varepsilon(s)\|_V + \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma)} \|1*\vartheta_\varepsilon(s)\|_V\right]; \qquad (4.147)$$

inoltre, si noti che $\|g(\cdot)\|_H$ e $\|h(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)}$ sono funzioni appartenenti allo spazio $L^1(0,T)$, poiché per ipotesi $g \in L^2(0,T;H)$ e $h \in L^2(0,T;L^2(\Gamma))$.

A questo punto si scelga $\delta = \overline{c}/2 > 0$ in modo da poter applicare il Lemma di Gronwall (cfr. Appendice, Lemma 23). In conclusione, si ha per ogni $t \in (0,T)$

$$\int_{Q_t} [\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{\varepsilon,1} - \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{\varepsilon,2}]\vartheta_\varepsilon + \int_{Q_t} \left[\beta'_\varepsilon(\chi_{\varepsilon,1}) - \beta'_\varepsilon(\chi_{\varepsilon,2})\right]\chi_\varepsilon$$
$$+ \|\nabla\chi_\varepsilon\|_{L^2(Q_t)}^2 + \mu\|\chi_\varepsilon(t)\|_H^2 + \|1*\vartheta_\varepsilon(t)\|_V^2$$
$$\leq c\left[\|\eta_{0,\varepsilon}\|_H^2 + \|g\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|h\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}^2\right]. \qquad (4.148)$$

Da questa relazione segue immediatamente l'unicità della soluzione $(\vartheta_\varepsilon, \chi_\varepsilon)$ (si pone $g_1 = g_2$, $h_1 = h_2$ e $\eta_{0,\varepsilon,1} = \eta_{0,\varepsilon,2}$) e la dipendenza continua della soluzione dai dati.

Osservazione 16. *Grazie al risultato di unicità della soluzione appena ricavato, si può affermare che il passaggio al limite per $n \nearrow +\infty$ è valido per tutta la successione delle n e non solo per una sottosuccessione.*

A questo punto la dimostrazione del Teorema 3 può dirsi conclusa.

4.3 Stime uniformi in ε

Nella presente sezione e in quella successiva, si giungerà all'esistenza di una soluzione del problema originario (P_μ), con $\mu > 0$ fissato.

Grazie al Teorema 3, appena dimostrato, si può affermare l'esistenza ed unicità della soluzione del problema (P_ε) per $\varepsilon > 0$ fissato. A questo punto, la soluzione del problema originario (P_μ) verrà ricavata facendo tendere il paramentro ε a zero.

Si consideri un'arbitraria soluzione $(\vartheta_\varepsilon, \chi_\varepsilon)$ del problema approssimato (P_ε)

$$\begin{aligned}
\partial_t \left(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon + \chi_\varepsilon\right) + B\vartheta_\varepsilon &= w \quad \text{in } V', \text{ q.o. in } (0,T) && (4.149)\\
\mu\partial_t\chi_\varepsilon + A\chi_\varepsilon + \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) + \sigma'(\chi_\varepsilon) &= \vartheta_\varepsilon \quad \text{q.o. in } Q && (4.150)\\
\vartheta_\varepsilon(0) &= \vartheta_{0,\varepsilon} \quad \text{q.o. in } \Omega && (4.151)\\
\chi_\varepsilon(0) &= \chi_0 \quad \text{q.o. in } \Omega. && (4.152)
\end{aligned}$$

Verranno svolte alcune stime a priori per poter calcolare il limite per ε tendente a zero, usando opportuni risultati di compattezza. In generale, le stime saranno valide per valori di ε sufficientemente piccoli e saranno, ad ogni modo, indipendenti da ε.

Prima stima a priori

La prima stima è analoga alla prima stima del precedente Capitolo 4.2.2.

Si noti che tutti i termini sono stimati da una costante c indipendente da ε, eccetto il termine in cui compare la funzione β_ε. In questo caso, si procede come segue

$$\int_\Omega \beta_\varepsilon(\chi_0) \leq \int_\Omega \beta(\chi_0) \leq c, \tag{4.153}$$

ove si è usato il fatto che $\beta_\varepsilon(r) \leq \beta(r)$ per ogni $r \in \mathbf{R}$ (come già ricordato in (4.4)); inoltre, per ipotesi, $\beta(\chi_0) \in L^1(\Omega)$ (si veda (3.15)).

Raccogliendo tutti i termini stimati e passando all'estremo superiore sull'intervallo temporale $(0,T)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\|I_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\vartheta_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|\chi_\varepsilon\|^2_{H^1(0,T;H)} + \|\chi_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;V)}&\\
+ \|\beta_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq c.& \qquad (4.154)
\end{aligned}$$

Inoltre, poiché $w \in L^2(0,T;V')$, per confronto nella prima equazione (4.149), si ricava

$$\|\partial_t \mathrm{Log}_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon)\|_{L^2(0,T;V')} \leq c. \tag{4.155}$$

Seconda stima a priori

L'obiettivo di questo capitolo è ricavare una stima del termine non lineare β'_ε. Si testi l'equazione (4.150) per $\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)$ e si integri su $(0,t)$, con $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned}
\mu \int_{Q_t} (\partial_t\chi_\varepsilon)\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) + \int_{Q_t} \nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla\left[\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\right] + \int_{Q_t} \left|\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\right|^2&\\
= \int_{Q_t} \vartheta_\varepsilon\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) - \int_{Q_t} \sigma'(\chi_\varepsilon)\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon).& \qquad (4.156)
\end{aligned}$$

Ogni termine sarà stimato separatamente. Innanzitutto, il primo termine viene riscritto nel seguente modo

$$\mu \int_{Q_t} (\partial_t\chi_\varepsilon)\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) = \mu \int_{Q_t} \frac{d}{dt}\Big[\beta_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\Big] = \mu \int_\Omega \beta_\varepsilon(\chi_\varepsilon(t)) - \mu \int_\Omega \beta_\varepsilon(\chi_0); \tag{4.157}$$

si sposti l'ultimo addendo sul lato destro dell'equazione (4.156)

$$\mu \int_\Omega \beta_\varepsilon(\chi_0) \leq \mu \int_\Omega \beta(\chi_0) \leq c, \tag{4.158}$$

poiché $0 \leq \beta_\varepsilon(r) \leq \beta(r)$ per ogni $r \in \mathbf{R}$ e $\beta(\chi_0) \in L^1(\Omega)$ per ipotesi.

Il secondo termine è non negativo, dal momento che β'_ε è una funzione monotona

$$\int_{Q_t} \nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla\left[\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\right] = \int_{Q_t} \beta''_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\,|\nabla\chi_\varepsilon|^2 \geq 0. \tag{4.159}$$

Infine, si possono stimare rapidamente gli ultimi termini dell'equazione (4.156) applicando le disuguaglianze di Hölder e Young

$$\int_{Q_t} \vartheta_\varepsilon\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) \leq \delta\left\|\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\right\|^2_{L^2(0,t;H)} + c_\delta\left\|\vartheta_\varepsilon\right\|^2_{L^2(0,T;H)} \tag{4.160}$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_t} \sigma'(\chi_\varepsilon)\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) &\leq \delta\left\|\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\right\|^2_{L^2(0,t;H)} + c_\delta\left\|\sigma'(\chi_\varepsilon)\right\|^2_{L^2(0,T;H)} \\ &\leq \delta\left\|\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\right\|^2_{L^2(0,t;H)} + c_\delta\left\|\chi_\varepsilon\right\|^2_{L^2(0,T;H)}, \end{aligned} \tag{4.161}$$

per ogni $\delta > 0$ arbitrario; si ricordi che σ' è una funzione lipschitziana (si veda (3.12)) e che la norma di ϑ_ε e la norma di χ_ε sono uniformemente limitate grazie alla stima (4.154).

Si scelga $\delta = 1/4$; raccogliendo tutti i termini stimati e passando all'estremo superiore per $t \in (0,T)$, si ottiene in particolare

$$\left\|\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\right\|^2_{L^2(0,T;H)} \leq c. \tag{4.162}$$

Osservazione 17. *Come già visto in precedenza, si ha per ogni $\varepsilon > 0$ fissato*

$$\|\chi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;D(A;H))} \leq c\left[\|m_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H)} + \|\chi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H)}\right]; \tag{4.163}$$

d'altra parte, grazie alle stime (4.154) e (4.162) appena trovate, si può concludere che tale norma è uniformemente limitata da una costante indipendente da ε

$$\|\chi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;D(A;H))} \leq c. \tag{4.164}$$

Terza stima a priori

La stima seguente è necessaria per poter ottenere una limitazione sul termine logaritmico in un opportuno spazio funzionale. Dal confronto con la prima equazione (4.149), si può già asserire che

$$\mathrm{Log}_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) \in H^1(0,T;V'), \tag{4.165}$$

con norma uniformemente limitata rispetto al parametro ε. Lo scopo dei prossimi calcoli sarà quello di verificare l'appartenenza del termine $\mathrm{Log}_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon)$ ad uno spazio che garantisca una maggiore regolarità sia nella variabile spaziale, sia nella variabile temporale.

Si testi l'equazione (4.149) per il termine $\mathrm{Log}_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon)$ e si integri su $(0,t)$, con $t \in (0,T]$

$$\begin{aligned}\int_{Q_t} (\partial_t \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon)\, \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon + \int_{Q_t} (\partial_t \chi_\varepsilon)\, \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon + \int_{Q_t} \nabla \vartheta_\varepsilon \cdot \nabla (\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon) \\ + \int_{\Sigma_t} \alpha \vartheta_\varepsilon (\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon) = \int_{Q_t} g\,(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon) + \int_{\Sigma_t} h\,(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon). \qquad (4.166)\end{aligned}$$

Innanzitutto, si riscriva il primo termine nel seguente modo

$$\begin{aligned}\int_{Q_t} (\partial_t \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon)\, \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon(t)|^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega |\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon(t)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon}\|_H^2 . \qquad (4.167)\end{aligned}$$

Osservazione 18. *Si ricordi che vale la seguente proprietà (si confronti [6], Cap. II, Proposizione 2.6):*

$$Log_\varepsilon(r) = \varepsilon r + \log_\varepsilon(r) \nearrow \log(r) \quad per\ \varepsilon \to 0^+,\ \forall r > 0. \qquad (4.168)$$

Da ciò, segue:

$$Log_\varepsilon(r) \le r \quad \forall r > 1 \qquad (4.169)$$

$$Log_\varepsilon(r) \le 0 \quad \forall r \le 1 \qquad (4.170)$$

L'ultimo addendo della stima precedente risulta uniformemente limitato rispetto ε, purché ε vari in un intervallo limitato ($\varepsilon \in (0,1)$, ad esempio), poiché

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon}(x) &= \varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon}(x) + \log_\varepsilon(\vartheta_{0,\varepsilon}(x)) \le \varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon}(x) + \log(\vartheta_{0,\varepsilon}(x)) \\ &\le \varepsilon \|\vartheta_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} + \log_\varepsilon(\vartheta_{0,\varepsilon}(x))\, \chi_{\{0<\vartheta_{0,\varepsilon}<1\}} + \log_\varepsilon(\vartheta_{0,\varepsilon}(x))\, \chi_{\{\vartheta_{0,\varepsilon}\ge 1\}} \\ &\le c\, \|\vartheta_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \qquad (4.171)\end{aligned}$$

grazie all'Osservazione 18, con $\chi_{\{0<\vartheta_{0,\varepsilon}<1\}}$ la funzione caratteristica dell'insieme definito a pedice

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases} \qquad \forall E \subseteq \mathbf{R}^3 \ \text{ misurabile.} \qquad (4.172)$$

Passando, quindi, all'estremo superiore essenziale su $x \in \Omega$

$$\|\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} \le c\, \|\vartheta_{0,\varepsilon}\|_{L^\infty(\Omega)} \le c. \qquad (4.173)$$

Il secondo termine viene spostato sul lato destro dell'equazione (4.166) e così stimato

$$\int_{Q_t} (\partial_t \chi_\varepsilon) \, \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon \leq \int_0^t \|\partial_t \chi_\varepsilon(s)\|_H \, \|\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon(s)\|_H; \tag{4.174}$$

si noti che la funzione $\|\partial_t \chi_\varepsilon(\cdot)\|_H$ appartiene allo spazio $L^1(0,T)$ ed è ivi uniformemente limitata rispetto a ε, grazie alla stima (4.154).

Il terzo termine è non negativo, grazie alle limitazioni trovate nel Lemma 8 sul termine logaritmico

$$\int_{Q_t} \nabla \vartheta_\varepsilon \cdot \nabla \left(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon\right) = \int_{Q_t} \left(\mathrm{Log}'_\varepsilon \vartheta_\varepsilon\right) |\nabla \vartheta_\varepsilon|^2 \geq 0. \tag{4.175}$$

Il termine di bordo richiede un'analisi più approfondita. Ad ogni modo, esso risulterà inferiormente limitato da una costante negativa che sarà spostata a secondo membro.

Sfruttando l'Osservazione 18, si possono eseguire le prime minorazioni

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} \alpha \vartheta_\varepsilon (\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon) &\geq \overline{\alpha} \int_0^t \left[\int_{\Gamma \cap \{\vartheta_\varepsilon > 1\}} \vartheta_\varepsilon (\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon) + \int_{\Gamma \cap \{\vartheta_\varepsilon \leq 1\}} \vartheta_\varepsilon (\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon) \right] \\ &\geq \overline{\alpha} \int_0^t \left[\int_{\Gamma \cap \{\vartheta_\varepsilon < 0\}} \vartheta_\varepsilon \left(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon\right) + \int_{\Gamma \cap \{0 \leq \vartheta_\varepsilon \leq 1\}} \vartheta_\varepsilon \left(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon\right) \right] \\ &\geq \overline{\alpha} \int_0^t \left[\int_{\Gamma \cap \{0 \leq \vartheta_\varepsilon \leq 1\}} \vartheta_\varepsilon \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon \right]. \end{aligned} \tag{4.176}$$

Si osservi, a questo punto, che la funzione $f_\varepsilon(r) := r\mathrm{Log}_\varepsilon(r)$ appartiene allo spazio $C^1([0,1])$, $\forall \varepsilon > 0$, grazie alle proprietà delle funzioni coinvolte. Inoltre, $f_\varepsilon(r) \nearrow r \log(r)$, anch'essa funzione appartenente allo spazio $C^1([0,1])$.

Allora, grazie al Teorema di Convergenza Monotona, l'integrale considerato è inferiormente limitato da una costante indipendente da ε

$$\overline{\alpha} \int_0^t \left[\int_{\Gamma \cap \{0 \leq \vartheta_\varepsilon \leq 1\}} \vartheta_\varepsilon \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon \right] \geq -c, \tag{4.177}$$

per qualche $c > 0$.

Restano da trattare i termini di sorgente g e h. Il termine di volume è facilmente manipolabile

$$\int_{Q_t} g \left(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon\right) \leq \int_0^t \|g(s)\|_H \, \|\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon(s)\|_H; \tag{4.178}$$

inoltre, la funzione $\|g(\cdot)\|_H$ appartiene allo spazio $L^1(0,T)$, poiché per ipotesi $g \in L^2(0,T;H)$. Nuovamente, il termine di bordo richiede qualche calcolo aggiuntivo

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_t} h\left(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon\right) &= \int_0^t \left[\int_{\Gamma\cap\{\vartheta_\varepsilon\le 1\}} h\left(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon\right) + \int_{\Gamma\cap\{\vartheta_\varepsilon> 1\}} h\left(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon\right)\right] \\
&\le \int_0^t \int_{\Gamma\cap\{\vartheta_\varepsilon> 1\}} h\left(\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon\right) \le \int_0^t \int_{\Gamma\cap\{\vartheta_\varepsilon> 1\}} h\vartheta_\varepsilon \\
&\le \|\vartheta_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} + \|h\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \le c, \qquad (4.179)
\end{aligned}$$

grazie all'ipotesi di non negatività della funzione h, al Teorema di Traccia (cfr. Appendice, Teorema 33) e alla stima (4.154).

Infine, raccogliendo tutti i termini stimati, si ottiene la seguente disuguaglianza $\forall t \in (0,T)$

$$\|\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon(t)\|^2_H \le c + \int_0^t \left(\|\partial_t \chi_\varepsilon(s)\|_H + \|g(s)\|_H\right) \|\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon(s)\|_H \, ds; \qquad (4.180)$$

si applichi, a questo punto, il Lemma di Gronwall (cfr. Appendice, Lemma 23), e si passi all'estremo superiore su $t \in (0,T)$

$$\|\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)} \le c. \qquad (4.181)$$

4.4 Passaggio al limite per $\varepsilon \searrow 0$

Tenendo in considerazione tutte le stime fin'ora ricavate e usando alcuni risultati di compattezza, si può concludere che esistono quattro funzioni

$$\begin{aligned}
&\vartheta \in L^2(0,T;V) && (4.182)\\
&\chi \in L^2(0,T;D(A;H)) \cap H^1(0,T;H) && (4.183)\\
&\xi \in L^2(0,T;H) && (4.184)\\
&\mathscr{L} \in L^\infty(0,T;H) \cap H^1(0,T;V') && (4.185)
\end{aligned}$$

tali che, a meno di una sottosuccessione di $\varepsilon \searrow 0$, siano il limite debole o debole-star delle soluzioni approssimanti

$$\begin{aligned}
&\vartheta_\varepsilon \rightharpoonup \vartheta \quad \text{in } L^2(0,T;V) && (4.186)\\
&\chi_\varepsilon \rightharpoonup \chi \quad \text{in } L^2(0,T;D(A;H)) \cap H^1(0,T;H) && (4.187)\\
&\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) \rightharpoonup \xi \quad \text{in } L^2(0,T;H) && (4.188)\\
&\mathrm{Log}_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} \mathscr{L} \quad \text{in } L^\infty(0,T;H) \cap H^1(0,T;V'). && (4.189)
\end{aligned}$$

Proposizione 19. *Risultano soddisfatte le condizioni di Cauchy sui dati iniziali:*

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}(0) = \log \vartheta_0 && (4.190)\\
&\chi(0) = \chi_0 && (4.191)
\end{aligned}$$

in H e quasi ovunque in Ω.

Dimostrazione. Si ricordi che la convergenza debole in $H^1(0,T;H)$ di una successione implica la convergenza debole in H dei corrispondenti valori iniziali. Da ciò segue direttamente che

$$\chi_\varepsilon(0) \rightharpoonup \chi(0) \quad \text{in } H, \text{ per } \varepsilon \to 0; \tag{4.192}$$

d'altra parte, per ipotesi,

$$\chi_\varepsilon(0) = \chi_0 \quad \text{in } V, \ \forall \varepsilon. \tag{4.193}$$

Per l'unicità del limite, si ottiene

$$\chi(0) = \chi_0 \quad \text{in } H \text{ e quasi ovunque in } \Omega. \tag{4.194}$$

Per quanto riguarda il termine logaritmico, si può affermare che

$$\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_\varepsilon(0) = \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon} \rightharpoonup \mathscr{L}(0) \quad \text{in } V', \text{ per } \varepsilon \to 0, \tag{4.195}$$

ossia $\forall v \in V$

$$\langle \mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon}, v \rangle \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \langle \mathscr{L}(0), v \rangle \quad \text{in } \mathbf{R}. \tag{4.196}$$

D'altra parte,

$$\mathrm{Log}_\varepsilon(r) = \varepsilon r + \log_\varepsilon(r) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \log(r) \quad \forall r > 0, \tag{4.197}$$

e, per costruzione,

$$\vartheta_{0,\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \vartheta_0 \quad \text{per q.o. } x \in \Omega. \tag{4.198}$$

Quindi,

$$\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \log \vartheta_0 \quad \text{per q.o. } x \in \Omega. \tag{4.199}$$

La convergenza puntuale implica la convergenza in misura; inoltre, il termine $\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon}$ è limitato in norma $L^\infty(\Omega)$, come è stato calcolato nella stima (4.173).

Quindi, poiché $\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon} \in L^p(\Omega)$, $\forall p \in [1, +\infty]$, utlizzando la Proposizione 28 (enunciata nell'Appendice) si ottiene

$$\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \log \vartheta_0 \quad \text{in } L^q(\Omega), \ \forall q < p; \tag{4.200}$$

in particolare, $\mathrm{Log}_\varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon} \to \log \vartheta_0$ in $L^2(\Omega)$, per $\varepsilon \searrow 0$.

In conclusione, per l'unicità del limite, si ha

$$\mathscr{L}(0) = \log \vartheta_0 \quad \text{in } H \text{ e quasi ovunque in } \Omega. \tag{4.201}$$

□

Le funzioni limite (ϑ, χ) risulteranno le soluzioni del problema originale (P_μ), con $\mu > 0$, dopo che saranno identificati i limiti dei termini non lineari.

Grazie al Lemma di Aubin (cfr. Appendice, Lemma 24), si può affermare che

$$\chi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \chi \quad \text{fortemente in } L^2(0,T;V). \tag{4.202}$$

Si può, quindi, immediatamente concludere che

$$\sigma'(\chi_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \sigma'(\chi) \quad \text{in } L^2(0,T;H), \tag{4.203}$$

grazie alla lipschitzianità della funzione σ'. Inoltre,

$$\beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon) \rightharpoonup \xi \quad \text{debolmente in } L^2(0,T;H), \text{ per } \varepsilon \searrow 0; \tag{4.204}$$

quindi, passando al limite, si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_Q \beta'_\varepsilon(\chi_\varepsilon)\chi_\varepsilon = \int_Q \xi\chi. \tag{4.205}$$

Ricordando che $\partial\beta$ è un operatore massimale monotono e applicando il Lemma di Barbu (cfr. Appendice, Corollario 26), si può concludere che

$$\chi \in D(\partial\beta) \tag{4.206}$$
$$\xi \in \partial\beta(\chi) \quad \text{q.o. in } Q. \tag{4.207}$$

Per quanto riguarda il termine logaritmico, grazie all'immersione compatta di H in V' e al lemma di Aubin (cfr. Appendice, Lemma 24), si ha

$$\mathrm{Log}_\varepsilon\vartheta_\varepsilon := \varepsilon\vartheta_\varepsilon + \log_\varepsilon \vartheta_\varepsilon \to \mathscr{L} \quad \text{*-debole in } L^\infty(0,T;H) \text{ e forte in } L^2(0,T;V'). \tag{4.208}$$

Quindi,

$$\log_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \mathscr{L} \quad \text{debole in } L^2(0,T;H) \text{ e forte in } L^2(0,T;V'), \tag{4.209}$$

poiché $\varepsilon\vartheta_\varepsilon \to 0$ fortemente in $L^2(0,T;V)$.

Allora, vale

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \langle \log_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon), \vartheta_\varepsilon \rangle = \int_0^T \langle \mathscr{L}, \vartheta \rangle. \tag{4.210}$$

Si applichi nuovamente il Lemma di Barbu (cfr. Appendice, Corollario 26) e si concluda che

$$\vartheta \in D(\log), \text{ quindi } \vartheta > 0 \tag{4.211}$$
$$\mathscr{L} = \log\vartheta \quad \text{q.o. in } Q. \tag{4.212}$$

Osservazione 20. *È interessante notare che, nei passaggi precedenti, si sarebbero potuti utilizzare due parametri indipendenti ε e ε' per regolarizzare rispettivamente $\log\vartheta$ e $\xi \in \partial\beta(\chi)$. In tal caso, si considera un parametro fissato, ad esempio ε', e si manda ε a zero: in tal modo, si giunge ad un risultato di esistenza per un problema parzialmente regolarizzato.*

Inoltre, tutte le stime a priori ricavate nel capitolo precedente restano conservate per le funzioni limite, grazie alla inferiore semicontinuità delle norme coinvolte; grazie a ciò, è possibile, quindi, mandare a zero anche l'altro parametro ε' che era stato inizialmente considerato fisso. Il discorso è analogo scambiando ε con ε'.

4.5 Unicità della soluzione di (P_μ) e dipendenza continua dai dati

Affinché la dimostrazione per la buona positura del problema (P_μ), con $\mu > 0$ fissato, risulti completa, è necessario dimostrare che la soluzione del problema sia unica e che dipenda con continuità dai dati iniziali e dalle funzioni note del problema.

Il procedimento è analogo a quello svolto nella sezione 4.2.4 per la dimostrazione dell'unicità della soluzione del problema (P_ε).

Si considera la prima equazione (3.18) del problema (P_μ), integrata formalmente in tempo, e la seconda equazione (3.19). Siano $(\vartheta_i, \chi_i, \xi_i)$ per $i = 1, 2$ due soluzioni del problema (P_μ) corrispondenti agli insiemi di dati $(w_i, \vartheta_{0,i}, \chi_{0,i})$ per $i = 1, 2$. Si scrive il problema per entrambe le soluzioni e si sottraggono rispettivamente le prime due equazioni

$$[\log \vartheta_1 - \log \vartheta_2] + [\chi_1 - \chi_2] + 1 * B(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 1 * (w_1 - w_2) + [\eta_{0,1} - \eta_{0,2}] \quad (4.213)$$

e le seconde due

$$\mu \partial_t(\chi_1 - \chi_2) - \Delta(\chi_1 - \chi_2) + [\xi_1 - \xi_2] + [\sigma'(\chi_1) - \sigma'(\chi_2)] = \vartheta_1 - \vartheta_2. \quad (4.214)$$

A questo punto, si testa la (4.213) per $\vartheta := \vartheta_1 - \vartheta_2$ e la (4.214) per $\chi := \chi_1 - \chi_2$ e si integrano le due espressioni sull'intervallo temporale $(0, t)$, con $t \in (0, T]$; quindi, si somma membro a membro. Si ottiene

$$\int_{Q_t} [\log \vartheta_1 - \log \vartheta_2]\vartheta + \int_{Q_t} (1 * \nabla\vartheta)\nabla\vartheta + \int_{\Sigma_t} (1 * \alpha\vartheta)\vartheta + \mu \int_{Q_t} (\partial_t \chi)\chi + \int_{Q_t} |\nabla\chi|^2$$
$$+ \int_{Q_t} \xi\chi = \int_{Q_t} (1 * w + \eta_0)\vartheta - \int_{Q_t} [\sigma'(\chi_1) - \sigma'(\chi_2)]\chi. \quad (4.215)$$

ove si è introdotta una notazione analoga per tutte le differenze considerate (per esempio: $w := w_1 - w_2$, etc.).

Dopo oppportune minorazioni e maggiorazioni, si perviene alla seguente stima $\forall t \in (0, T)$

$$\int_{Q_t} [\log \vartheta_1 - \log \vartheta_2]\vartheta + \int_{Q_t} \xi\chi + \|\nabla\chi\|^2_{L^2(Q_t)} + \mu \|\chi(t)\|^2_H + \|1 * \vartheta(t)\|^2_V$$
$$\leq c \left[\|\eta_0\|^2_H + \|g\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|h\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \right]. \quad (4.216)$$

Da questa relazione segue immediatamente l'unicità della soluzione (si pone $g_1 = g_2$, $h_1 = h_2$ e $\eta_{0,1} = \eta_{0,2}$) e la dipendenza continua della soluzione dai dati.

Capitolo 5

Comportamento al limite per $\mu \searrow 0$

L'obiettivo di questo capitolo sarà la dimostrazione del Teorema 2 e lo studio del comportamento asintotico del problema al tendere a zero del parametro di rilassamento in tempo μ.

Dopo alcune di stime a priori, uniformi rispetto a tale parametro, si farà tendere μ a zero e si ricaverà una soluzione del problema limite (P_0) come limite della successione delle soluzioni dei problemi (P_μ).

Si supponga, per semplicità, $\mu \in (0,1)$; sappiamo che il Teorema 1 garantisce l'esistenza della soluzione del seguente problema (P_μ), con $\mu > 0$ fissato:

$$\partial_t (\log \vartheta_\mu + \chi_\mu) + B\vartheta_\mu = w \quad \text{in } V', \text{ q.o. in } (0,T) \tag{5.1}$$

$$\mu \partial_t \chi_\mu + A\chi_\mu + \xi_\mu + \sigma'(\chi_\mu) = \vartheta_\mu \quad \text{q.o. in } Q \tag{5.2}$$

$$\xi_\mu \in \partial\beta(\chi_\mu) \quad \text{q.o. in } \Omega \tag{5.3}$$

$$\log \vartheta_\mu(0) = \log \vartheta_0 \quad \text{q.o. in } Q \tag{5.4}$$

$$\chi_\mu(0) = \chi_{0,\mu} \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{5.5}$$

Il problema limite (P_0), invece, è costituito dall'equazione della temperatura integrata in tempo e da un'equazione di fase stazionaria non lineare (si ricordi che è necessario definire l'operatore $\mathrm{Log}\vartheta$ come è stato fatto nel Capitolo 3.2):

$$\zeta(t) + \chi(t) + 1 * B\vartheta(t) = 1 * w(t) + \eta_0 \quad \text{in } V', \text{ q.o. in } (0,T) \tag{5.6}$$

$$\zeta \in \mathrm{Log}\vartheta \tag{5.7}$$

$$A\chi + \xi + \sigma'(\chi) = \vartheta \quad \text{q.o. in } Q \tag{5.8}$$

$$\xi \in \partial\beta(\chi) \quad \text{q.o. in } Q, \tag{5.9}$$

con $\eta_0 := \log \vartheta_0 + \chi_0$. Si noti che, poiché non compare più il termine di derivata temporale nell'equazione di fase, non ha senso imporre una condizione iniziale per

χ; tuttavia, si recupera il termine χ_0, che rappresenta il limite dei dati iniziali delle soluzioni χ_μ, nella prima equazione.

5.1 Stime uniformi in μ

In questa sezione verranno richiamate alcune stime a priori, uniformi rispetto al parametro μ, per poter successivamente mandare tale parametro a zero. Utilizzando noti risultati di compattezza, si troverà una sottosuccessione di soluzioni che converge (in modo debole) al problema limite; in realtà convergerà l'intera famiglia di soluzioni grazie al risultato di unicità visto poco sopra.

Le stime a priori riportate in questo capitolo sono, in realtà, stime formali: sarebbe necessario svolgere tutte le stime tornando nuovamente al problema approssimato in ε, in modo tale che i termini non lineari siano più regolari.

Tutte le costanti che compaiono nelle prossime stime sono quantità positive, indipendenti dal parametro μ.

Prima stima a priori

La stima di base garantisce la limitatezza uniforme delle norme delle soluzioni $(\vartheta_\mu, \chi_\mu)$ nei rispettivi spazi di appartenenza. Per poterla ricavare si testa l'equazione (5.1) per ϑ_μ e la seconda equazione (5.2) del problema (P_μ) per $\partial_t \chi_\mu$, quindi si integra su $(0, t)$, con $t \in (0, T]$ e si sommano membro a membro le due equazioni ottenute.

$$\int_{Q_t} \partial_t(\log \vartheta_\mu)\vartheta_\mu + \int_{Q_t} |\nabla \vartheta_\mu|^2 + \int_{\Sigma_t} \alpha\, |\vartheta_\mu|^2 + \mu \int_{Q_t} |\partial_t \chi_\mu|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \chi_\mu(t)|^2$$
$$+ \int_{Q_t} \xi_\mu \partial_t \chi_\mu + \int_{Q_t} \sigma'(\chi_\mu)\partial_t \chi_\mu = \int_{Q_t} w\vartheta_\mu + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \chi_{0,\mu}|^2. \tag{5.10}$$

Studiamo ogni termine separatamente. Innanzitutto, si può riscrivere il primo termine nel seguente modo

$$\int_{Q_t} \partial_t(\log \vartheta_\mu)\vartheta_\mu = \int_{Q_t} \frac{1}{\vartheta_\mu}\vartheta'_\mu \vartheta_\mu = \int_\Omega \vartheta_\mu(t) - \int_\Omega \vartheta_0; \tag{5.11}$$

il primo integrale è non negativo, poichè $\vartheta_\mu > 0$ quasi ovunque su Q, mentre il secondo integrale è una costante positiva, indipendente da μ, e viene spostata al secondo membro dell'equazione (5.10).

Il secondo e terzo termine dell'equazione (5.10) vengono minorati dalla norma di ϑ_μ in $L^2(0,t;V)$

$$\int_{Q_t} |\nabla \vartheta_\mu|^2 + \int_{\Sigma_t} \alpha\, |\vartheta_\mu|^2 \geq \bar{c}\, \|\vartheta_\mu\|^2_{L^2(0,t;V)}\, . \tag{5.12}$$

Per stimare gli ultimi due termini del membro sinistro dell'equazione (5.10), separiamo i casi in cui si utilizza l'Ipotesi 1 oppure l'Ipotesi 2.

Sotto l'Ipotesi 1, in cui $\sigma' = a$ costante e vale la limitazione (3.38), si ha

$$\int_{Q_t} \xi_\mu \partial_t \chi_\mu + \int_{Q_t} \sigma'(\chi_\mu)\partial_t \chi_\mu = \int_\Omega \beta(\chi_\mu(t)) + a\int_\Omega \chi_\mu(t) - \int_\Omega \beta(\chi_{0,\mu}) - a\int_\Omega \chi_{0,\mu}$$
$$\geq c_1 \|\chi_\mu(t)\|_H^2 - c_2 + a\int_\Omega \chi_\mu(t) - \int_\Omega \beta(\chi_{0,\mu}) - a\int_\Omega \chi_{0,\mu}; \tag{5.13}$$

spostando gli ultimi quattro termini a destra della disuguaglianza (5.10), essi vengono così stimati

$$-a\int_\Omega \chi_\mu(t) + \int_\Omega \beta(\chi_{0,\mu}) + a\int_\Omega \chi_{0,\mu} \leq \delta \|\chi_\mu(t)\|_H^2 + c_\delta, \tag{5.14}$$

per ogni $\delta > 0$, ove si è utilizzata l'ipotesi (3.36) e la disuguaglianza di Young.

Sotto l'Ipotesi 2, in cui vale la minorazione (3.40), si ha

$$\int_{Q_t} \xi_\mu \partial_t \chi_\mu + \int_{Q_t} \sigma'(\chi_\mu)\partial_t \chi_\mu = \int_\Omega \beta(\chi_\mu(t)) + \int_\Omega \sigma(\chi_\mu(t)) - \int_\Omega \beta(\chi_{0,\mu}) - \int_\Omega \sigma(\chi_{0,\mu})$$
$$\geq c_1 \|\chi_\mu(t)\|_H^2 - c_2 - \int_\Omega \beta(\chi_{0,\mu}) - \int_\Omega \sigma(\chi_{0,\mu}); \tag{5.15}$$

si spostano, quindi, gli ultimi tre termini a destra della disuguaglianza (5.10) e li si maggiora con una costante indipendente da μ, grazie alle ipotesi (3.13) e (3.36).

Si passi a stimare i termini che compaiono a secondo membro: ricordando la definizione di w (si veda (3.10)), si ha

$$\int_{Q_t} g\vartheta_\mu \leq \|g\|_{L^2(Q_t)} \|\vartheta_\mu\|_{L^2(Q_t)} \leq \delta \|\vartheta_\mu\|_{L^2(Q_t)}^2 + c_\delta \|g\|_{L^2(Q_t)}^2$$
$$\int_{\Sigma_t} h\vartheta_\mu \leq \delta \|\vartheta_\mu\|_{L^2(\Sigma_t)}^2 + c_\delta \|h\|_{L^2(\Sigma_t)}^2 \leq \delta \|\vartheta_\mu\|_{L^2(0,t;V)}^2 + c_\delta \|h\|_{L^2(\Sigma_t)}^2, \tag{5.16}$$

applicando la disuguaglianza di Hölder, la disuguaglianza di Young e il Teorema di Traccia.

L'ultimo termine che compare nel membro destro dell'equazione (5.10) è uniformemente limitato da una costante grazie all'ipotesi (3.36).

Raccogliendo tutti i termini stimati e scegliendo $0 < \delta < \min\{\overline{c}/2, c_1\}$, si può concludere che

$$\|\vartheta_\mu\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \mu \|\partial_t \chi_\mu\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|\chi_\mu\|_{L^\infty(0,T;V)}^2 \leq c, \tag{5.17}$$

passando all'estremo superiore sull'intervallo $(0,T)$.

Inoltre, per confronto nella prima equazione (5.1) integrata in tempo, si può concludere che

$$\|\log \vartheta_\mu\|_{L^\infty(0,T;V')} \leq c. \tag{5.18}$$

Seconda stima a priori

La seguente stima si ottiene svolgendo un procedimento analogo a quello seguito nel Capitolo 4 per dimostrare l'esistenza della soluzione del problema (P_μ), con $\mu > 0$.

La seconda stima fornisce una limitazione per la norma del termine $\xi_\mu \in \partial\beta(\chi_\mu)$: si consideri l'equazione (5.2), la si testi per ξ_μ e si integri sull'intervallo $(0,t)$. Dopo alcune opportune minorazioni, si ottiene

$$\|\xi_\mu\|_{L^2(0,T;H)} \le c; \tag{5.19}$$

inoltre, per confronto nella seconda equazione (5.2) e grazie al Teorema di regolarità ellittica (cfr. Appendice, Teorema 31; si veda il Capitolo 4.2.3 e l'Osservazione 17 per una descrizione più dettagliata), si può dedurre una maggiore regolarità nella variabile spaziale per la funzione χ_μ

$$\|\chi_\mu\|_{L^2(0,T;D(A;H))} \le c. \tag{5.20}$$

Stima di Cauchy

Si considerino due problemi (P_μ) e (P_ν), con $\mu, \nu > 0$ ($\mu > \nu$ senza perdita di generalità), e, seguendo il procedimento illustrato per l'unicità della soluzione del problema (P_μ) nel Capitolo 4, si sottraggano le prime due equazioni (5.1), integrate in tempo, e le seconde due equazioni (5.2) tra di loro; si testino le espressioni ottenute per $\vartheta_\mu - \vartheta_\nu$ e $\chi_\mu - \chi_\nu$ rispettivamente, quindi si integri sull'intervallo $(0,t)$; in conclusione, si sommino membro a membro le due equazioni

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_t} [\log\vartheta_\mu - \log\vartheta_\nu](\vartheta_\mu - \vartheta_\nu) + \int_{Q_t} (1 * \nabla(\vartheta_\mu - \vartheta_\nu))\nabla(\vartheta_\mu - \vartheta_\nu) \\
&+ \int_{\Sigma_t} (1 * \alpha(\vartheta_\mu - \vartheta_\nu))\,(\vartheta_\mu - \vartheta_\nu) + \lambda \int_{Q_t} \partial_t(\chi_\mu - \chi_\nu)(\chi_\mu - \chi_\nu) + \int_{Q_t} |\nabla(\chi_\mu - \chi_\nu)|^2 \\
&+ \int_{Q_t} (\xi_\mu - \xi_\nu)(\chi_\mu - \chi_\nu) + \int_{Q_t} [\sigma'(\chi_\mu) - \sigma'(\chi_\nu)](\chi_\mu - \chi_\nu) \\
&\le \int_{Q_t} (\chi_{0,\mu} - \chi_{0,\nu})(\vartheta_\mu - \vartheta_\nu),
\end{aligned} \tag{5.21}$$

per qualche $\nu < \lambda < \mu$.

A questo punto, la disuguaglianza trovata verrà trattata in modo diverso a seconda che si assuma l'Ipotesi 1 oppure l'Ipotesi 2 sui termini β e σ.

Sotto l'Ipotesi 1, la derivata della funzione σ è uguale ad una costante $a \in \mathbf{R}$, quindi il termine in cui compare σ' è identicamente nullo.

Dopo aver svolto le opportune maggiorazioni e minorazioni, analoghe a quelle viste nella Sezione 4.2.4, si ricava la seguente disuguaglianza

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_t} [\log\vartheta_\mu - \log\vartheta_\nu](\vartheta_\mu - \vartheta_\nu) + \int_{Q_t} (\xi_\mu - \xi_\nu)(\chi_\mu - \chi_\nu) \\
&+ \|1 * (\vartheta_\mu - \vartheta_\nu)(t)\|_V^2 + \|\nabla\chi_\mu - \nabla\chi_\nu\|_{L^2(Q_t)}^2 \le c\,\|\chi_{0,\mu} - \chi_{0,\nu}\|_H^2\,,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$\forall t \in (0,T)$, dove $c \in \mathbf{R}_+$ è una costante indipendente da μ e ν.

Grazie a questa stima e all'ipotesi che $\{\chi_{0,\mu}\}$ sia una successione convergente in V, si può concludere che

$$\begin{aligned} \{1 * \vartheta_\mu\} &\quad \text{è una successione di Cauchy nello spazio } L^\infty(0,T;V) && (5.23)\\ \{\nabla\chi_\mu\} &\quad \text{è una successione di Cauchy nello spazio } L^2(0,T;H). && (5.24)\end{aligned}$$

Sotto l'Ipotesi 2, invece, sfruttando la proprietà (3.39) di forte monotonia assunta per $\partial\beta + \sigma'$, si ha

$$\begin{aligned} &\int_{Q_t} |\nabla(\chi_\mu - \chi_\nu)|^2 + \int_{Q_t} (\xi_\mu - \xi_\nu)(\chi_\mu - \chi_\nu) + \int_{Q_t} [\sigma'(\chi_\mu) - \sigma'(\chi_\nu)](\chi_\mu - \chi_\nu) \\ &\geq \|\nabla(\chi_\mu - \chi_\nu)\|^2_{L^2(0,T;H)} + \rho\,\|\chi_\mu - \chi_\nu\|^2_{L^2(0,T;H)} \geq c\,\|\chi_\mu - \chi_\nu\|^2_{L^2(0,T;V)}\,. \qquad (5.25)\end{aligned}$$

Per i restanti termini si applicano gli stessi ragionamenti visti nella Sezione 4.2.4 e si perviene alla seguente stima

$$\begin{aligned} &\int_{Q_t} [\log\vartheta_\mu - \log\vartheta_\nu](\vartheta_\mu - \vartheta_\nu) + \|1 * (\vartheta_\mu - \vartheta_\nu)\|^2_{L^\infty(0,T;V)} + \|\chi_\mu - \chi_\nu\|^2_{L^2(0,T;V)} \\ &\qquad\qquad \leq c\,\|\chi_{0,\mu} - \chi_{0,\nu}\|^2_H\,, \qquad (5.26)\end{aligned}$$

dove $c \in \mathbf{R}_+$ è una costante indipendente da μ e ν.

5.2 Passaggio al limite per $\mu \searrow 0$ sotto l'Ipotesi 1

Raccogliendo tutte le stime trovate, si può concludere che esistono

$$\begin{aligned} \vartheta &\in L^2(0,T;V) && (5.27)\\ \chi &\in L^2(0,T;D(A;H)) && (5.28)\\ \xi &\in L^2(0,T;H) && (5.29)\\ \zeta &\in L^\infty(0,T;V') && (5.30)\end{aligned}$$

tali che valgano le seguenti convergenze al tendere di $\mu \searrow 0$ (almeno per una sottosuccessione)

$$\begin{aligned} \vartheta_\mu &\rightharpoonup \vartheta \quad \text{in } L^2(0,T;V) && (5.31)\\ 1 * \vartheta_\mu &\to 1 * \vartheta \quad \text{in } L^\infty(0,T;V) && (5.32)\\ \chi_\mu &\rightharpoonup \chi \quad \text{in } L^2(0,T;D(A;H)) && (5.33)\\ \mu\partial_t\chi_\mu &\rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2(0,T;H) && (5.34)\\ \xi_\mu &\rightharpoonup \xi \quad \text{in } L^2(0,T;H) && (5.35)\\ \log(\vartheta_\mu) &\overset{*}{\rightharpoonup} \zeta \quad \text{in } L^\infty(0,T;V'). && (5.36)\end{aligned}$$

Dunque, le funzioni limite (ϑ, χ) risolvono il problema (P_0), purché si identifichino i limiti dei termini non lineari. Per fare ciò si seguiranno principalmente le linee guida dell'articolo [18], Sez. 3.3, che si occupa dello studio asintotico di un problema simile, al tendere a zero del coefficiente di energia di interfaccia.

Si consideri innanzitutto il termine in cui compare il grafico massimale monotono $\partial\beta$: si svolgerà un stima pesata, scegliendo $t^{2\gamma}$ come peso, con $\gamma = 3/4$.

Tale scelta è dettata dall'esigenza che l'esponente di t soddisfi alcune di disuguaglianze (si veda (5.53) e (5.55)) e ciò risulta possibile se $1/2 < \gamma < 1$. Quindi, il peso naturale $\gamma = 1/2$ non è utlizzabile in questo caso e si sceglie per comodità $\gamma = 3/4$.

Lemma 21 ([18], Lemma 3.1). *Sia $\gamma > 0$, allora vale la seguente stima a priori, indipendente da μ,*

$$\int_Q t^{2\gamma} \frac{|\partial_t \vartheta_\mu|^2}{\vartheta_\mu} + \sup_{t\in(0,T)} \left\{ t^{2\gamma} \|\vartheta_\mu(t)\|_V^2 \right\} + \mu \sup_{t\in(0,T)} \left[t^{2\gamma} \int_\Omega |\partial_t \chi_\mu(t)|^2 \right] + \int_Q t^{2\gamma} |\nabla \partial_t \chi_\mu|^2 \le c. \tag{5.37}$$

Dimostrazione. Si testi la prima equazione (5.1) del problema (P_μ) per $t^{2\gamma}\partial_t\vartheta_\mu$ e si integri sull'intervallo $(0,t)$, con $t \in (0,T]$,

$$\int_{Q_t} (\partial_t \log \vartheta_\mu) t^{2\gamma} (\partial_t \vartheta_\mu) + \int_{Q_t} (\partial_t \chi_\mu) t^{2\gamma} (\partial_t \vartheta_\mu) + \int_{Q_t} t^{2\gamma} \nabla \vartheta_\mu \cdot \nabla(\partial_t \vartheta_\mu) + \int_{\Sigma_t} \alpha \vartheta_\mu t^{2\gamma} (\partial_t \vartheta_\mu) = \int_{Q_t} g t^{2\gamma} \partial_t \vartheta_\mu + \int_{\Sigma_t} h t^{2\gamma} \partial_t \vartheta_\mu. \tag{5.38}$$

Si differenzi formalmente la seconda equazione (5.2) rispetto al tempo e si testi per $t^{2\gamma}\partial_t\chi_\mu$; si noti che, siccome $\sigma' = a$, allora $\sigma'' = 0$. Si integri, quindi, sull'intervallo $(0,t)$

$$\mu \int_{Q_t} t^{2\gamma} (\partial_t \chi_\mu)(\partial_t^2 \chi_\mu) + \int_{Q_t} t^{2\gamma} \nabla(\partial_t \chi_\mu) \cdot \nabla(\partial_t \chi_\mu) + \int_{Q_t} t^{2\gamma} \xi'_\mu |\partial_t \chi_\mu|^2 = \int_{Q_t} (\partial_t \vartheta_\mu) t^{2\gamma} (\partial_t \chi_\mu). \tag{5.39}$$

Infine, si sommino le due equazioni membro a membro

$$\int_{Q_t} (\partial_t \log \vartheta_\mu) t^{2\gamma} (\partial_t \vartheta_\mu) + \int_{Q_t} \nabla \vartheta_\mu t^{2\gamma} \nabla(\partial_t \vartheta_\mu) + \int_{\Sigma_t} \alpha \vartheta_\mu t^{2\gamma} (\partial_t \vartheta_\mu) + \mu \int_{Q_t} t^{2\gamma} (\partial_t \chi_\mu)(\partial_t^2 \chi_\mu) + \int_{Q_t} t^{2\gamma} |\nabla(\partial_t \chi_\mu)|^2 + \int_{Q_t} t^{2\gamma} \xi'_\mu |\partial_t \chi_\mu|^2 = \int_{Q_t} g t^{2\gamma} \partial_t \vartheta_\mu + \int_{\Sigma_t} h t^{2\gamma} \partial_t \vartheta_\mu. \tag{5.40}$$

Per mantenere la chiarezza della trattazione, ogni termine sarà stimato separatamente. Il primo termine risulta non negativo

$$\int_{Q_t} (\partial_t \log \vartheta_\mu) t^{2\gamma} (\partial_t \vartheta_\mu) = \int_{Q_t} t^{2\gamma} \frac{|\partial_t \vartheta_\mu|^2}{\vartheta_\mu} \ge 0, \tag{5.41}$$

mentre il secondo termine viene così stimato

$$\begin{aligned}
\int_{Q_t} \nabla\vartheta_\mu t^{2\gamma}\nabla(\partial_t\vartheta_\mu) &= \int_{Q_t} t^{2\gamma}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|\nabla\vartheta_\mu|^2\right] \\
&= \frac{t^{2\gamma}}{2}\int_\Omega |\nabla\vartheta_\mu(t)|^2 - \int_{Q_t} 2\gamma t^{2\gamma-1}|\nabla\vartheta_\mu|^2 \\
&\geq \frac{t^{2\gamma}}{2}\|\nabla\vartheta_\mu(t)\|_H^2 - 2\gamma T^{2\gamma-1}\|\nabla\vartheta_\mu\|^2_{L^2(0,T;H)} \\
&\geq \frac{t^{2\gamma}}{2}\|\nabla\vartheta_\mu(t)\|_H^2 - c, \qquad (5.42)
\end{aligned}$$

poiché $\vartheta_\mu \in L^2(0,T;V)$ e la sua norma è uniformemente limitata, grazie alla stima (5.17).

Il terzo e il quarto termine vengono trattati in modo analogo

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_t} t^{2\gamma}\alpha\vartheta_\mu(\partial_t\vartheta_\mu) &= \int_{\Sigma_t} \alpha t^{2\gamma}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|\vartheta_\mu|^2\right] \\
&= \frac{t^{2\gamma}}{2}\int_\Gamma \alpha|\vartheta_\mu(t)|^2 - \int_{\Sigma_t} 2\gamma t^{2\gamma-1}\alpha|\vartheta_\mu|^2 \\
&\geq \overline{\alpha}\frac{t^{2\gamma}}{2}\|\vartheta_\mu(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} - 2\overline{\alpha}\gamma T^{2\gamma-1}\|\vartheta_\mu\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \\
&\geq \overline{\alpha}\frac{t^{2\gamma}}{2}\|\vartheta_\mu(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} - c; \qquad (5.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu\int_{Q_t} t^{2\gamma}(\partial_t\chi_\mu)(\partial_t^2\chi_\mu) &= \frac{\mu t^{2\gamma}}{2}\int_\Omega |\partial_t\chi_\mu(t)|^2 - \mu\int_{Q_t} 2\gamma t^{2\gamma-1}|\partial_t\chi_\mu|^2 \\
&\geq \frac{\mu t^{2\gamma}}{2}\|\partial_t\chi_\mu(t)\|_H^2 - 2\mu\gamma T^{2\gamma-1}\|\partial_t\chi_\mu\|^2_{L^2(0,T;H)} \\
&\geq \frac{\mu t^{2\gamma}}{2}\|\partial_t\chi_\mu(t)\|_H^2 - c, \qquad (5.44)
\end{aligned}$$

grazie alla precedente stima (5.17), uniforme rispetto a μ.

In particolare, si trova

$$\int_{Q_t} \nabla\vartheta_\mu t^{2\gamma}\nabla(\partial_t\vartheta_\mu) + \int_{\Sigma_t} t^{2\gamma}\alpha\vartheta_\mu(\partial_t\vartheta_\mu) \geq c_1 t^{2\gamma}\|\vartheta_\mu(t)\|_V^2 + c_2 t^{2\gamma}\|\vartheta_\mu(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} - c \qquad (5.45)$$

con $c_1 \leq \min\{\overline{\alpha}/4, 1/2\}$ e $c_2 = \overline{\alpha}/4$ costanti positive. Infine, il quinto e il sesto termine sono non negativi, poiché $\partial\beta$ è un operatore monotono.

Passiamo, quindi, al membro destro in cui compaiono i termini noti g e h:

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_t} g t^{2\gamma}\partial_t\vartheta_\mu = t^{2\gamma}\int_\Omega g(t)\vartheta_\mu(t) - \int_{Q_t} 2\gamma t^{2\gamma-1}\vartheta_\mu g - \int_{Q_t} t^{2\gamma}\vartheta_\mu\partial_t g \\
&\le \delta t^{2\gamma}\int_\Omega |\vartheta_\mu(t)|^2 + c_\delta t^{2\gamma}\int_\Omega |g(t)|^2 + cT^{2\gamma-1}\left[\int_{Q_t}|\vartheta_\mu|^2 + \int_{Q_t}|g|^2 + \int_{Q_t}|\partial_t g|^2\right] \\
&= \delta t^{2\gamma}\|\vartheta_\mu(t)\|_H^2 + c_\delta\|g(t)\|_H^2 + cT^{2\gamma-1}\left[\|\vartheta_\mu\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|g\|^2_{H^1(0,T;H)}\right] \\
&\le \delta t^{2\gamma}\|\vartheta_\mu(t)\|_V^2 + c, \qquad (5.46)
\end{aligned}$$

per ogni $\delta > 0$; nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che $g \in H^1(0,T;H)$ e tale spazio è immerso con continuità in $C^0([0,T];H)$, e la successione delle norme di ϑ_μ è uniformemente limitata in $L^2(0,T;V)$ (si veda (5.17)).

Un discorso analogo si svolge per il termine in h: anche in questo caso $h \in H^1(0,T;L^2(\Gamma))$ e, quindi, appartiene allo spazio $C^0([0,T];L^2(\Gamma))$; la norma di ϑ_μ in $L^2(0,T;L^2(\Gamma))$ è maggiorata dalla norma in $L^2(0,T;V)$, grazie al Teorema di Traccia (cfr. Appendice, Teorema 33), ed è uniformemente limitata rispetto a μ, grazie alla stima (5.17).

$$\int_{\Sigma_t} h t^{2\gamma}\partial_t\vartheta_\mu \le \delta t^{2\gamma}\|\vartheta_\mu(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + c, \qquad (5.47)$$

per ogni $\delta > 0$.

Raccogliendo le stime ottenute e scegliendo $0 < \delta < \min\{c_1/2, c_2/2\}$, si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_t} t^{2\gamma}\frac{|\partial_t\vartheta_\mu|^2}{\vartheta_\mu} + t^{2\gamma}\|\nabla\vartheta_\mu(t)\|_H^2 + t^{2\gamma}\|\vartheta_\mu(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + \mu t^{2\gamma}\|\partial\chi_\mu(t)\|_H^2 + \\
&\qquad + \int_{Q_t} t^{2\gamma}|\nabla(\partial_t\chi_\mu)|^2 \le c. \qquad (5.48)
\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore su $t \in (0,T)$ si ottiene la tesi. □

A questo punto, si usi la seguente identità

$$\begin{aligned}
\partial_t(t^\gamma\vartheta_\mu) &= \gamma t^{\gamma-1}\vartheta_\mu + t^\gamma\partial_t\vartheta_\mu \\
&= \gamma t^{\gamma-1}\vartheta_\mu + t^\gamma\partial_t\left(\left(\sqrt{\vartheta_\mu}\right)^2\right)t^{\pm\frac{\gamma}{2}} \\
&= \gamma t^{\gamma-1}\vartheta_\mu + 2t^\gamma\left(\partial_t\sqrt{\vartheta_\mu}\right)\cdot t^{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\vartheta_\mu}\cdot t^{-\frac{\gamma}{2}} \qquad (5.49)
\end{aligned}$$

e si osservi che

$$\begin{aligned}
\left\|t^{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\vartheta_\mu}\right\|_{L^\infty(0,T;L^{12}(\Omega))} &= \|t^\gamma\vartheta_\mu\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega))} \le c\,\|t^\gamma\vartheta_\mu\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(0,T;V)} \\
&\le cT^{\frac{\gamma}{2}}\|\vartheta_\mu\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,T;V)} \le c, \qquad (5.50)
\end{aligned}$$

per il Teorema di Immersione di Sobolev (cfr. Appendice, Teorema 34) e la stima (5.17).

Grazie al lemma appena dimostrato (Lemma 21), si può affermare che

$$\left\| t^{\gamma}\left(\partial_t \sqrt{\vartheta_\mu}\right)\right\|^2_{L^2(0,T;H)} = \int_Q t^{2\gamma}\left|\partial_t\left(\sqrt{\vartheta_\mu}\right)\right|^2 = \int_Q t^{2\gamma}\left|\frac{\partial_t \vartheta_\mu}{\sqrt{\vartheta_\mu}}\right|^2 \le c. \tag{5.51}$$

A questo punto, si vogliono individuare degli esponenti $q, s > 1$ opportuni in modo tale che valga

$$\begin{aligned}&\left\| t^{\gamma}\left(\partial_t \sqrt{\vartheta_\mu}\right)\cdot t^{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\vartheta_\mu}\cdot t^{-\frac{\gamma}{2}}\right\|_{L^q(0,T;L^{\frac{12}{7}}(\Omega))} \\ \le &\left\| t^{\gamma}\left(\partial_t \sqrt{\vartheta_\mu}\right)\right\|_{L^2(0,T;H)}\left\| t^{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\vartheta_\mu}\right\|_{L^\infty(0,T;L^{12}(\Omega))}\left\| t^{-\frac{\gamma}{2}}\right\|_{L^s(0,T)} \le c,\end{aligned} \tag{5.52}$$

ove si è applicata la disuguaglianza di Hölder sia in spazio, sia in tempo; si impongono, dunque, le seguenti limitazioni

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s}, \quad \text{con } s \text{ tale che } t^{-\frac{\gamma}{2}} \in L^s(0,T). \tag{5.53}$$

Analogamente, si cercano degli esponenti $p, r > 1$ opportuni in modo tale che valga

$$\begin{aligned}\left\| t^{\gamma-1}\vartheta_\mu\right\|_{L^p(0,T;L^6(\Omega))} &\le \left\| t^{\gamma-1}\right\|_{L^r(0,T)}\left\|\vartheta_\mu\right\|_{L^2(0,T;L^6(\Omega))} \\ &\le \left\| t^{\gamma-1}\right\|_{L^r(0,T)}\left\|\vartheta_\mu\right\|_{L^2(0,T;V)} \le c,\end{aligned} \tag{5.54}$$

ove si applica la disuguaglianza di Hölder nella variabile temporale e la disuguaglianza di Sobolev nella variabile spaziale; quindi, è necessario che

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r}, \quad \text{con } r \text{ tale che } t^{\gamma-1} \in L^r(0,T). \tag{5.55}$$

In conclusione, si verifica che le condizioni imposte sugli esponenti sono soddisfatte se

$$\frac{1}{2} < \gamma < 1 \tag{5.56}$$

e si sceglie, per comodità, $\gamma = 3/4$; di conseguenza, gli altri esponenti hanno i seguenti valori

$$p = \frac{6}{5},\ r = 3,\ q = \frac{14}{13},\ s = \frac{7}{3}. \tag{5.57}$$

Si ha

$$\begin{aligned}&\left\|\partial_t\left(t^{\gamma}\vartheta_\mu\right)\right\|_{L^{14/13}(0,T;L^{12/7}(\Omega))} \\ \le &\left\|\gamma t^{\gamma-1}\vartheta_\mu\right\|_{L^{14/13}(0,T;L^{12/7}(\Omega))} + \left\| 2t^{\gamma}\left(\partial_t\sqrt{\vartheta_\mu}\right)\cdot t^{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\vartheta_\mu}\cdot t^{-\frac{\gamma}{2}}\right\|_{L^{14/13}(0,T;L^{12/7}(\Omega))} \\ &\le c\left\|\gamma t^{\gamma-1}\vartheta_\mu\right\|_{L^{6/5}(0,T;L^6(\Omega))} + c \le c.\end{aligned} \tag{5.58}$$

A questo punto si può applicare il Lemma di Simon (cfr. Appendice, Lemma 27): nel caso presente, la terna di spazi funzionali è $(V, H, L^{12/7}(\Omega))$, con V immerso in modo compatto in H; grazie alla stima appena dimostrata sappiamo che

$$\|\partial_t (t^\gamma \vartheta_\mu)\|_{L^q(0,T;L^{12/7}(\Omega))} \leq c, \tag{5.59}$$

con $q = 14/13 > 1$; inoltre, grazie al lemma precedente (Lemma 21)

$$\left\| t^{\frac{3}{4}} \vartheta_\mu \right\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq c. \tag{5.60}$$

Si ottiene in conclusione che

$$t^{\frac{3}{4}} (\vartheta_\mu - \vartheta) \to 0 \quad \text{fortemente in } C^0([0,T]; H), \tag{5.61}$$

quindi,

$$\vartheta_\mu \chi_\mu \to \vartheta \chi \quad \text{debolmente in } L^1(Q_t). \tag{5.62}$$

Infatti, $\vartheta_\mu \chi_\mu = t^{3/4} \vartheta_\mu t^{-3/4} \chi_\mu$ e vale $\chi_\mu \rightharpoonup \chi$ in $L^\infty(0,T;V)$ e $t^{-3/4} \in L^1(0,T)$.

Si ricordi che

$$\begin{aligned} \chi_\mu &\rightharpoonup \chi \quad \text{in } L^\infty(0,T;V) && (5.63)\\ \xi_\mu &\rightharpoonup \xi \quad \text{in } L^2(0,T;H); && (5.64) \end{aligned}$$

inoltre, raccogliendo i risultati appena trovati,

$$\limsup_{\mu \to 0} \int_Q \xi_\mu \chi_\mu \leq \int_Q \xi \chi. \tag{5.65}$$

Infatti, dalla seconda equazione (5.2) del problema (P_μ), per confronto, si ha:

$$\begin{aligned} \int_Q \xi_\mu \chi_\mu &= -\mu \int_Q (\partial_t \chi_\mu) \chi_\mu - \int_Q |\nabla \chi_\mu|^2 - \int_Q a \chi_\mu + \int_Q \vartheta_\mu \chi_\mu \\ &= -\mu \int_Q \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[|\chi_\mu|^2 \right] - \|\nabla \chi_\mu\|^2_{L^2(Q)} - \int_Q a \chi_\mu + \int_Q \vartheta_\mu \chi_\mu \\ &= -\frac{\mu}{2} \|\chi_\mu(T)\|^2_H + \frac{\mu}{2} \|\chi_\mu(0)\|^2_H - \|\nabla \chi_\mu\|^2_{L^2(Q)} - \int_Q a \chi_\mu + \int_Q \vartheta_\mu \chi_\mu \\ &\leq \frac{\mu}{2} \|\chi_{0,\mu}\|^2_H - \|\nabla \chi_\mu\|^2_{L^2(Q)} - \int_Q a \chi_\mu + \int_Q \vartheta_\mu \chi_\mu \\ &\leq \mu c - \|\nabla \chi_\mu\|^2_{L^2(Q)} - \int_Q a \chi_\mu + \int_Q \vartheta_\mu \chi_\mu \qquad (5.66) \end{aligned}$$

D'altra parte, grazie alle convergenze trovate (si veda (5.24), (5.33) , (5.62) e si ricordi che σ è lineare), si ha

$$\int_Q \xi \chi = -\int_Q |\nabla \chi|^2 - \int_Q a \chi + \int_Q \vartheta \chi, \tag{5.67}$$

e quindi

$$\limsup_{\mu\to 0}\int_Q \xi_\mu\chi_\mu \le -\int_Q |\nabla\chi|^2 - \int_Q a\chi + \int_Q \vartheta\chi = \int_Q \xi\chi. \tag{5.68}$$

Si può, quindi, applicare il Lemma di Barbu (cfr. Appendice, Corollario 26) e concludere che

$$\chi \in D(\partial\beta) \tag{5.69}$$

$$\xi \in \partial\beta(\chi) \quad \text{q.o. in } Q. \tag{5.70}$$

Si consideri adesso il termine logaritmico e si applichino gli stessi ragionamenti svolti per il termine ξ.

Si ricordi che

$$\vartheta_\mu \rightharpoonup \vartheta \quad \text{in } L^2(0,T;V) \tag{5.71}$$

$$\log(\vartheta_\mu) \overset{*}{\rightharpoonup} \zeta \quad \text{in } L^\infty(0,T;V'). \tag{5.72}$$

Si ponga $\zeta_\mu = \log\vartheta_\mu$. Si vuole ora provare che

$$\limsup_{\mu\to 0}\int_0^T \langle\zeta_\mu,\vartheta_\mu\rangle \le \int_0^T \langle\zeta,\vartheta\rangle. \tag{5.73}$$

Per confronto nella prima equazione (5.1) integrata in tempo, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle\zeta_\mu,\vartheta_\mu\rangle \quad = \quad & -\int_Q \chi_\mu\vartheta_\mu - \int_Q (1*\nabla\vartheta_\mu)\cdot\nabla\vartheta_\mu - \int_\Sigma (1*\alpha\vartheta_\mu)\,\vartheta_\mu \\ & + \int_Q (1*g)\vartheta_\mu + \int_\Sigma (1*h)\vartheta_\mu + \int_Q [\log\vartheta_0 + \chi_{0,\mu}]\,\vartheta_\mu;\end{aligned} \tag{5.74}$$

d'altra parte, grazie alle convergenze deboli e forti trovate (si veda (5.31), (5.32), (5.62)),

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle\zeta,\vartheta\rangle \quad = \quad & -\int_Q \chi\vartheta - \int_Q (1*\nabla\vartheta)\cdot\nabla\vartheta - \int_\Sigma \alpha\,(1*\vartheta)\,\vartheta \\ & + \int_Q (1*g)\vartheta + \int_\Sigma (1*h)\vartheta + \int_Q [\log\vartheta_0 + \chi_0]\,\vartheta.\end{aligned} \tag{5.75}$$

Da ciò segue la (5.73).

Applicando nuovamente il Lemma di Barbu (cfr. Appendice, Lemma 25), si può, quindi, concludere che, siccome $\zeta_\mu \in \mathrm{Log}\vartheta_\mu = \partial\Psi(\vartheta_\mu)$ (si veda [18], Osservazione 4.3),

$$\vartheta \in D(\mathrm{Log}) \tag{5.76}$$

$$\zeta \in \partial\Psi(\vartheta) = \mathrm{Log}\vartheta. \tag{5.77}$$

È anche possibile dimostrare che la componente ϑ (temperatura assoluta) della soluzione di (P_0) è strettamente positiva (si veda [18], Teorema 4.7, pg. 2174).

5.3 Passaggio al limite per $\mu \searrow 0$ sotto l'Ipotesi 2

Dalle stime ottenute, si può affermare che esistono

$$\vartheta \in L^2(0,T;V) \tag{5.78}$$
$$\chi \in L^2(0,T;D(A;H)) \tag{5.79}$$
$$\xi \in L^2(0,T;H) \tag{5.80}$$
$$\zeta \in L^\infty(0,T;V') \tag{5.81}$$

tali che valgano le seguenti convergenze al tendere di $\mu \searrow 0$ (almeno per una sottosuccessione)

$$\vartheta_\mu \rightharpoonup \vartheta \quad \text{in } L^2(0,T;V) \tag{5.82}$$
$$1 * \vartheta_\mu \to 1 * \vartheta \quad \text{in } L^\infty(0,T;V) \tag{5.83}$$
$$\chi_\mu \to \chi \quad \text{debolmente in } L^2(0,T;D(A;H)) \text{ e fortemente in } L^2(0,T;V) \tag{5.84}$$
$$\mu\partial_t\chi_\mu \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2(0,T;H) \tag{5.85}$$
$$\xi_\mu \rightharpoonup \xi \quad \text{in } L^2(0,T;H) \tag{5.86}$$
$$\log(\vartheta_\mu) \overset{*}{\rightharpoonup} \zeta \quad \text{in } L^\infty(0,T;V'). \tag{5.87}$$

Grazie alla convergenza forte della successione $\{\chi_\mu\}$, si può applicare direttamente il Lemma di Barbu (cfr. Appendice, Corollario 26) ai termini non lineari, senza dover ricorrere al Lemma 21.

Innanzitutto, grazie alla lipschitzianità della funzione σ' e alla convergenza forte della successione di $\{\chi_\mu\}$ nello spazio $L^2(0,T;V)$, si ha

$$\sigma'(\chi_\mu) \to \sigma'(\chi) \quad \text{in } L^2(0,T;H). \tag{5.88}$$

Inoltre, per confronto e grazie alle convergenze appena trovate, è automaticamente verificata la disuguaglianza

$$\limsup_{\mu\to 0} \int_Q \xi_\mu\chi_\mu \le \int_Q \xi\chi \tag{5.89}$$

quindi, vale

$$\chi \in D(\partial\beta), \quad \xi \in \partial\beta(\chi) \quad \text{q.o. in } Q. \tag{5.90}$$

Per quanto riguarda il termine logaritmico, si svolgono gli stessi ragionamenti visti per il passaggio al limite sotto l'Ipotesi 1 e si ricava

$$\limsup_{\mu\to 0} \int_0^T \langle \log\vartheta_\mu, \vartheta_\mu\rangle \le \int_0^T \langle\zeta,\vartheta\rangle, \tag{5.91}$$

e, conseguentemente, grazie al Lemma di Barbu,

$$\vartheta \in D(\mathrm{Log}), \quad \zeta \in \partial\Psi(\vartheta) = \mathrm{Log}\vartheta. \tag{5.92}$$

5.4 Unicità della soluzione di (P_0) e dipendenza continua dai dati

Il procedimento per dimostrare che la soluzione appena trovata del problema (P_0) dipenda in modo continuo dai dati è analogo a quello svolto per il risultato di unicità e dipendenza continua dai dati per il problema (P_μ), $\mu > 0$, visto nella Sezione 4.2.4; si vedano anche i ragionamenti svolti per ricavare la Stima di Cauchy nella Sezione 5.1.

In particolare, è necessario distinguere i due casi relativi all'Ipotesi 1 oppure all'Ipotesi 2, poiché, a seconda del comportamento delle funzioni β e σ, si giungerà a dei risultati lievemente diversi tra loro.

Si supponga che valga l'Ipotesi 1; dopo aver scritto il problema (P_0) per due soluzioni distinte $(\vartheta_i, \chi_i, \xi_i, \zeta_i)$, con $i = 1, 2$, si sottraggono membro a membro le singole equazioni.

$$[\zeta_1 - \zeta_2] + [\chi_1 - \chi_2] + 1 * B(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 1 * (w_1 - w_2) + \eta_{0,1} - \eta_{0,2} \tag{5.93}$$

$$A(\chi_1 - \chi_2) + [\xi_1 - \xi_2] + [\sigma'(\chi_1) - \sigma'(\chi_2)] = \vartheta_1 - \vartheta_2. \tag{5.94}$$

Si testa la prima equazione (5.93) per $\vartheta := \vartheta_1 - \vartheta_2$ e la seconda equazione (5.94) per $\chi := \chi_1 - \chi_2$ e si integra sull'intervallo $(0, t)$, con $t \in (0, T]$. Sommando le due equazioni membro a membro, si ottiene

$$\begin{aligned} &\int_{Q_t} \zeta\vartheta + \int_{Q_t} (1 * \nabla\vartheta)\nabla\vartheta + \int_{\Sigma_t} (1 * \alpha\vartheta)\,\vartheta + \int_{Q_t} |\nabla\chi|^2 + \int_{Q_t} \xi\chi \\ &\qquad + \int_{Q_t} [\sigma'(\chi_1) - \sigma'(\chi_2)]\chi = \int_{Q_t} (1 * w + \chi_0)\vartheta, \end{aligned} \tag{5.95}$$

ove si è introdotta una notazione analoga per tutte le differenze considerate (per esempio: $w := w_1 - w_2$, etc.).

Si ricordi che, avendo imposto l'Ipotesi 1, la derivata della funzione σ è uguale ad una costante $a \in \mathbf{R}$, quindi il termine in cui compare σ' è identicamente nullo.

Dopo aver svolto le opportune maggiorazioni e minorazioni, analoghe a quelle viste nella Sezione 4.2.4, si ricava la seguente disuguaglianza per ogni $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} &\int_{Q_t} \zeta\vartheta + \int_{Q_t} \xi\chi + \|\nabla\chi\|^2_{L^2(Q_t)} + \|1 * \vartheta(t)\|^2_V \\ &\le \tilde{M} \left[\|\eta_0\|^2_H + \|g\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|h\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \right]. \end{aligned} \tag{5.96}$$

Sotto l'Ipotesi 2, invece, sfruttando la proprietà (3.39), i termini in cui compaiono $\partial\beta$ e σ vengono trattati nel seguente modo

$$\begin{aligned} &\int_{Q_t} |\nabla\chi|^2 + \int_{Q_t} \xi\chi + \int_{Q_t} [\sigma'(\chi_1) - \sigma'(\chi_2)]\chi \\ &\ge \|\nabla\chi\|^2_{L^2(0,T;H)} + \rho\, \|\chi\|^2_{L^2(0,T;H)} \ge c\, \|\chi\|^2_{L^2(0,T;V)}. \end{aligned} \tag{5.97}$$

Per i restanti termini si applicano gli stessi ragionamenti visti nella Sezione 4.2.4 e si perviene alla seguente stima

$$\begin{aligned} &\int_{Q_t} \zeta\vartheta + \|1 * \vartheta\|^2_{L^\infty(0,T;V)} + \|\chi\|^2_{L^2(0,T;V)} \\ &\leq \overline{M} \left[\|\eta_0\|^2_H + \|g\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|h\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \right]. \end{aligned} \tag{5.98}$$

Infine, si osservi che, siccome Ψ è strettamente convessa, il suo sottodifferenziale $\partial\Psi$ è strettamente monotono e quindi si ha anche $\vartheta_1 = \vartheta_2$ nel caso in cui si ponga $g_1 = g_2$, $h_1 = h_2$ e $\eta_{0,1} = \eta_{0,2}$.

A

Appendice

In questa sezione sono raccolti tutti i teoremi e i risultati utilizzati nel corso delle dimostrazioni nei capitoli precedenti.

Accanto ad ogni proposizione è indicata un'opportuna referenza bibliografica.

Lemma 22 (**di Gronwall-Bellman**; [6], Appendice, Lemma A.4)**.** *Siano* $m \in L^1(0,T;\boldsymbol{R})$*,* $m \geq 0$ *q.o. su* $(0,T)$ *e* a *una costante positiva. Sia, inoltre,* $\phi \in C^0([0,T];\boldsymbol{R})$ *tale che* $\forall t \in (0,T)$

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\phi(s)ds. \tag{A.1}$$

Allora, $\forall t \in (0,T)$

$$|\phi(t)| \leq a\, e^{\int_0^t m(s)ds}. \tag{A.2}$$

Lemma 23 (**di Gronwall**; [6], Appendice, Lemma A.5)**.** *Siano* $m \in L^1(0,T;\boldsymbol{R})$*,* $m \geq 0$ *q.o. e* $a \geq 0$*. Sia, inoltre,* $\phi \in C^0([0,T];\boldsymbol{R})$ *tale che* $\forall t \in (0,T)$

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds. \tag{A.3}$$

Allora, $\forall t \in (0,T)$

$$|\phi(t)| \leq a + \int_0^t m(s)ds. \tag{A.4}$$

Lemma 24 (**di Aubin**; [20], Cap. 1.5, Teorema 5.1)**.** *Siano* B_0*,* B *e* B_1 *spazi di Banach tali che*

i) B_0 *e* B_1 *sono riflessivi e* $B_0 \subseteq B \subseteq B_1$ *con immersione continua,* *ii) B_0 è immerso con compattezza nello spazio B.*

Si definisca

$$X := \left\{ v \in L^{p_0}(0,T;B_0) \,\middle|\, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\} \tag{A.5}$$

con $T \in \boldsymbol{R}_+$ e p_0, $p_1 \in (1,+\infty)$.

Allora, lo spazio X è immerso con compattezza nello spazio $L^{p_0}(0,T;B)$.

Lemma 25 (**di Barbu**; [1], Cap. II, Lemma 1.3)**.** *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia A un sottoinsieme massimale monotono di $X \times X'$. Se $[u_n, v_n] \in A$, $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ e vale*

$$\limsup_{n \to +\infty} (u_n - u, v_n - v) \leq 0, \tag{A.6}$$

allora si ha

$$[u,v] \in A \quad e \quad (u_n, v_n) \to (u,v). \tag{A.7}$$

Corollario 26 ([6], Cap. II, Proposizione 2.5)**.** Sia H uno spazio di Hilbert riflessivo e A un operatore massimale monotono di H. Siano $[x_n, y_n] \in A$ tali che $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$ e

$$\limsup_{n \to +\infty} (y_n, x_n)_H \leq (y,x)_H, \tag{A.8}$$

allora si ha

$$[x,y] \in A \quad \text{e} \quad (y_n, x_n) \to (y,x). \tag{A.9}$$

Lemma 27 (**di Simon**; [25], Cap. 8, Corollario 4)**.** *Siano X, B e Y spazi di Banach tali che*

$$X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y, \quad \text{con immersione compatta di } X \text{ in } B. \tag{A.10}$$

Sia, inoltre, $\{f_\mu\}$ una successione limitata in $L^\infty(0,T;X)$, con la successione delle derivate temporali $\left\{\frac{\partial f_\mu}{\partial t}\right\}$ limitata in $L^q(0,T;Y)$, per qualche $q > 1$.

Allora, $\{f_\mu\}$ è relativamente compatta in $C^0([0,T];B)$.

Proposizione 28 ([28], Cap. XI, Proposizione 3.10)**.** *Siano $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^3$ limitato e $1 \leq q < p < +\infty$. Se la successione di funzioni $\{f_n\}$ è limitata in $L^p(\Omega)$ e $f_n \to f$ in misura in Ω, allora si ha*

$$f_n \to f \quad \text{fortemente in } L^q(\Omega). \tag{A.11}$$

Proposizione 29 (**Disuguaglianza di Young**; [14], Appendice B.2)**.** *Siano $p, q \in (1,+\infty)$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora, $\forall \delta > 0$ si ha*

$$ab \leq \delta a^p + c_\delta b^q \quad \forall a, b > 0, \tag{A.12}$$

con $c_\delta = (\delta p)^{-q/p} q^{-1}$.

Teorema 30 (**di Young**; [16], Cap.8, Proposizione 8.9)**.** *Siano X uno spazio di Banach e $p, q, r \in [1, +\infty]$ tali che*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1; \tag{A.13}$$

siano $f \in L^p(0, T)$ e $g \in L^q(0, T; X)$, per qualche $T > 0$. Allora si ha

$$\|f * g\|_{L^r(0,T;X)} \leq \|f\|_{L^p(0,T)} \|g\|_{L^q(0,T;X)} . \tag{A.14}$$

Teorema 31 (**Regolarità ellittica**; [21], Cap. 1.5, Teorema 5.1)**.** *Sia $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ un dominio limitato, sufficientemente regolare, e sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole dell'equazione ellittica*

$$-\Delta u = f \tag{A.15}$$

con condizioni di Neumann omogenee al bordo e $f \in L^2(\Omega)$.

Allora, $u \in H^2(\Omega)$ e vale

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right] . \tag{A.16}$$

Teorema 32 (**Disuguaglianza di Poincaré generalizzata**; [26], Cap. II, Teorema 1.4)**.** *Sia Ω un sottoinsieme di $\boldsymbol{R}^n$ connesso, limitato, con bordo lipschitz. Allora, esiste una costante c_P positiva tale che per ogni $v \in H^1(\Omega)$*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_P \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} + \left| \int_{\partial\Omega} v ds \right| \right) . \tag{A.17}$$

Teorema 33 (**Traccia e rilevamento**; [21], Cap. 1.8, Teorema 8.3)**.** *Sia $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ un insieme aperto, connesso, limitato e con bordo sufficientemente regolare.*

Per ogni $p \in [1, +\infty)$ esiste un operatore lineare, continuo e suriettivo, detto operatore di traccia,

$$\gamma|_{\partial\Omega} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \tag{A.18}$$

tale che coincide con l'operatore di restrizione (in senso classico) sulle funzioni di regolarità $C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$.

Inoltre, per ogni $p \in [1, +\infty)$ esiste un operatore lineare continuo, detto operatore di rilevamento,

$$\mathscr{R} : W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \to W^{1,p}(\Omega) \tag{A.19}$$

tale che $\gamma|_{\partial\Omega} \mathscr{R} v = v$ per ogni $v \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.

Teorema 34 (**Immersioni di Sobolev**; [14], Cap. 5, Teorema 6)**.** *Sia Ω un sottoinsieme aperto, limitato di $\boldsymbol{R}^n$, con bordo C^1.*

(1) Se $kp < n$, allora $\forall q \in [1, p^*]$, con $p^* = np/(n - kp)$

$$W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega); \tag{A.20}$$

inoltre, l'immersione è continua per ogni $q \in [1, p^*]$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega) \tag{A.21}$$

ed è compatta per ogni $q \in [1, p^*)$.

(2) Se $kp = n$*, allora* $\forall q \in [1, +\infty)$

$$W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega); \tag{A.22}$$

inoltre, l'immersione è continua e compatta per ogni $q \in [1, +\infty)$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega). \tag{A.23}$$

(3) Se $kp > n$*, allora*

$$W^{k,p}(\Omega) \subseteq C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega}) \tag{A.24}$$

dove

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p} & \text{se } \frac{n}{p} \text{ non è un intero} \\ \text{qualunque numero positivo } < 1 & \text{se } \frac{n}{p} \text{ è un intero}; \end{cases} \tag{A.25}$$

inoltre, l'immersione è continua e compatta

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega). \tag{A.26}$$

Teorema 35 (**di Banach-Caccioppoli, del Punto Fisso o delle Contrazioni**; [7], Cap. V, Teorema V.7)**.** *Sia* (X, d) *uno spazio metrico completo e* $f : X \to X$ *una contrazione, con costante di Lipschitz* $k \in [0, 1)$*, allora l'equazione*

$$x = f(x) \tag{A.27}$$

ammette una e una sola soluzione $\overline{x} \in X$*.*

Inoltre, per ogni x_0 *fissato in* X*, la successione* $\{x_n\} \subseteq X$ *così definita*

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \boldsymbol{N} \tag{A.28}$$

converge a $\overline{x}$ *e soddisfa la seguente maggiorazione*

$$d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \quad \forall n \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}. \tag{A.29}$$

Teorema 36 (**del Dini o della Funzione Implicita**; [11], Cap. II C, Teorema 3)**.** *Siano* X*,* Y *e* Z *spazi di Banach;* U *un sottoinsieme aperto di* $X \times Y$*;* $F : U \to Z$ *una mappa* C^1*. Valgano, inoltre, le seguenti proprietà:*

i) $(x_0, y_0) \in X \times Y$ *tale che* $F(x_0, y_0) = 0$

ii) la derivata parziale $F'_y(x_0, y_0)$ *è un'isomorfismo da* Y *a* Z*.*

Allora, esistono un'insieme aperto $W \subseteq X$*, con* $x_0 \in W$*, un insieme aperto* $V \subseteq U \subseteq X \times Y$*, con* $(x_0, y_0) \in V$*, e una mappa* C^1 $f : W \to Y$ *tale che*

$$(x, y) \in V, \ F(x, y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x \in W, \ y = f(x). \tag{A.30}$$

Ringraziamenti

Dopo tutti gli eventi che si sono succeduti nella mia vita e che hanno temprato il mio spirito, è giunto il momento propizio per potersi voltare a rimirare il passato e riconoscere le chiavi di volta che hanno contribuito alla mia crescita umana e accademica.

Procedendo *ab origine*, desidero ringraziare la mia insegnante della Scuola Elementare Sr. Giovannina Merlo, che mi ha accolto infante e con fermezza e sensibilità mi ha educato a basare la mia condotta su preziose fondamenta morali.

Le figure legate al triennio della Scuola Media che compaiono nella mia mente in modo più nitido e affettuoso sono Sr. Paola Bevilacqua e la prof.ssa Maria David, insegnante di Matematica e Scienze. Ricordo ogni volta con grande piacere i frenetici pomeriggi passati a giocare a palla-guerra e le indimenticabili lezioni in cui anche la proprietà commutativa dell'addizione diventava una storia avvincente.

Ricordo con particolare stima i miei professori del Liceo, ma su tutti riluce la figura di Don Matteo Zindo, maestro di *humanitas*, prima ancora che professore di Lettere Classiche. Lo ricordo con profonda gratitudine per aver forgiato la mia coscienza critica, per aver vigilato sul mio carattere a volte inquieto e per avermi trasmesso una conoscenza che trascende l'insegnamento scolastico.

Tuttavia, la mia carriera universitaria nell'ambito delle Scienze Matematiche non avrebbe mai avuto luogo se non ci fosse stato l'insostituibile sostegno del prof. Don Francesco Maj.

Desidero ringraziarlo per avermi pazientemente supportato (e sopportato) durante l'estate del 2005; nel corso dei miei studi è stata una presenza costante e vicina, anche se geograficamente lontana.

Ringrazio il prof. Dietmar Klemm, mio relatore per la tesi di laurea triennale, e la prof.ssa Elisabetta Rocca, mia relatrice per l'attuale tesi di laurea magistrale. Ringrazio, inoltre, il prof. Franco Gallone per le piacevoli e costruttive conversazioni nel suo ufficio.

Vorrei indirizzare un ultimo caloroso ringraziamento al prof. Giorgio Pederzoli per avermi illuminato la strada verso la decisione di proseguire gli studi e intraprendere il dottorato; lo ringrazio, inoltre, per il generoso impegno con cui si è prodigato per mettermi in contatto con diverse realtà accademiche.

Ringrazio, infine, tutta la mia famiglia e, in particolare, i miei genitori per avermi aiutato con tutti i mezzi possibili a raggiungere i miei obiettivi e per avermi sempre

sostenuto nelle mie scelte, in parte folli e in parte irremovibili.

Si affollano nella mia mente tutti i volti di coloro che ho conosciuto, di coloro che mi hanno donato un frammento piccolo o grande della loro vita per arricchire infinitamente la mia. Sarebbe troppo lungo scriverli tutti e sarebbe troppo ingiusto non ricordarli.

Serberò con affetto ogni istante. E come un Giano bifronte guarderò sempre innanzi a me, senza obliare il mio passato, poiché senza di esso non avrei identità.

Continuerò con costanza a tracciare ogni giorno una nuova linea.
Οὐδεμία ἡμέρα ἄνευ γραφῆς.

Bibliografia

[1] V. Barbu. *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces.* Noordhoff, Leyden, 1976.

[2] E. Bonetti, P. Colli, M. Fabrizio, and G. Gilardi. Modelling and long-time behaviour for phase transitions with entropy balance and thermal memory conductivity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems series B*, 6(5):1001–1026, 2006.

[3] E. Bonetti, P. Colli, M. Fabrizio, and G. Gilardi. Global solution to a singular integro-differential system related to the entropy balance. *Nonlinear Analysis: TMA*, 66(9):1949–1979, 2007.

[4] E. Bonetti, P. Colli, and M. Frémond. A phase field model with thermal memory governed by the entropy balance. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 13(11):1565–1588, 2003.

[5] E. Bonetti and M. Frémond. A phase transition model with entropy balance. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 26(7):539–556, 2003.

[6] H. Brezis. *Opérateurs maximaux monotones et sémi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, volume 5 of *North-Holland Mathematical Studies.* North-Holland, Amsterdam, 1973.

[7] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[8] M. Brokate and J. Sprekels. *Hysteresis and phase transitions.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[9] G. Caginalp. An analysis of a phase field model of a free boundary. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 92(3):205–245, 1986.

[10] G. Caginalp and P. C. Fife. Dynamics of layered interfaces arising from phase boundaries. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 48(3):506–518, 1988.

[11] Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, manifolds and physics. Volume I: Basics.* North-Holland, Amsterdam, 1977.

[12] P. Colli, G. Gentili, and C. Giorgi. Nonlinear systems describing phase transition models compatible with thermodynamics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 9(7):1015–1037, 1999.

[13] P. Colli, G. Gilardi, and M. Grasselli. Asymptotic analysis of a phase field model with memory for vanishing time relaxation. *Hiroshima Mathematical Journal*, 29(1):117–143, 1999.

[14] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1998.

[15] G. J. Fix. Phase field models for free boundary problems. In A. Fasano and M. Primicerio, editors, *Free boundary problems: theory and applications*, volume II, pages 580–589. Pitman Research Notes in Mathematics Ser. 79, Longman, London, 1983.

[16] G. B. Folland. *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[17] M. Frémond. *Non-smooth Thermomechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[18] G. Gilardi and E. Rocca. Convergence of phase field to phase relaxation models governed by an entropy equation with memory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 29(18):2149–2179, 2006.

[19] M. Gurtin. Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on a microforce balance. *Physica D*, 92(3-4):178–192, 1996.

[20] J. L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Gauthier Villar, Paris, 1969.

[21] J. L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, volume 1. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[22] Omero. *Odissea*. Einaudi, Torino, 2002. Versione di Rosa Calzecchi Onesti.

[23] E. Rocca. Asymptotic analysis of a conserved phase-field model with memory for vanishing time relaxation. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 10(2):899–916, 2000.

[24] G. Schimperna. *Transmission problems for nonlinear parabolic systems of phase-field type*. PhD thesis, Università degli Studi di Milano, 2000.

[25] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 146(4):65–96, 1987.

[26] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[27] A. Visintin. Stefan problem with phase relaxation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 34(3):225–245, 1985.

[28] A. Visintin. *Models of phase transitions.* Birkhauser Verlag, Boston, 1996.